

Rapport de recherche N° 43

Redistribution des effets hyperstatiques des ponts en béton précontraint par fluage linéaire

M.Y. LAU

Conformément à la note du 04/07/2014 de la direction générale de l'Ifsttar précisant la politique de diffusion des ouvrages parus dans les collections éditées par l'Institut, la reproduction de cet ouvrage est autorisée selon les termes de la licence CC BY-NC-ND. Cette licence autorise la redistribution non commerciale de copies identiques à l'original. Dans ce cadre, cet ouvrage peut être copié, distribué et communiqué par tous moyens et sous tous formats.



(CC BY-NC-ND 4.0)



Attribution — Vous devez créditer l'Oeuvre et intégrer un lien vers la licence. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens possibles mais vous ne pouvez pas suggérer que l'Ifsttar vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son Oeuvre.



Pas d'Utilisation Commerciale — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Oeuvre, tout ou partie du matériel la composant.



Pas de modifications — Dans le cas où vous effectuez une adaptation, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Oeuvre originale (par exemple, une traduction, etc.), vous n'êtes pas autorisé à distribuer ou mettre à disposition l'Oeuvre modifiée.

Le patrimoine scientifique de l'Ifsttar

Le libre accès à l'information scientifique est aujourd'hui devenu essentiel pour favoriser la circulation du savoir et pour contribuer à l'innovation et au développement socio-économique. Pour que les résultats des recherches soient plus largement diffusés, lus et utilisés pour de nouveaux travaux, l'Ifsttar a entrepris la numérisation et la mise en ligne de son fonds documentaire. Ainsi, en complément des ouvrages disponibles à la vente, certaines références des collections de l'INRETS et du LCPC sont dès à présent mises à disposition en téléchargement gratuit selon les termes de la licence Creative Commons CC BY-NC-ND.

Le service Politique éditoriale scientifique et technique de l'Ifsttar diffuse différentes collections qui sont le reflet des recherches menées par l'institut :

- Les collections de l'INRETS, Actes
- Les collections de l'INRETS, Outils et Méthodes
- Les collections de l'INRETS, Recherches
- Les collections de l'INRETS, Synthèses
- Les collections du LCPC, Actes
- Les collections du LCPC, Etudes et recherches des laboratoires des ponts et chaussées
- Les collections du LCPC, Rapport de recherche des laboratoires des ponts et chaussées
- Les collections du LCPC, Techniques et méthodes des laboratoires des ponts et chaussées, Guide technique
- Les collections du LCPC, Techniques et méthodes des laboratoires des ponts et chaussées, Méthode d'essai



Institut Français des Sciences et Techniques des Réseaux,
de l'Aménagement et des Transports
14-20 Boulevard Newton, Cité Descartes, Champs sur Marne
F-77447 Marne la Vallée Cedex 2

Contact : diffusion-publications@ifsttar.fr

www.ifsttar.fr



Redistribution des effets hyperstatiques des ponts en béton précontraint par fluage linéaire

M.Y. LAU
Ingénieur ETP - CHEBAP
Docteur-ingénieur
Département des structures et ouvrages d'art
Laboratoire central des Ponts et Chaussées

Cette étude, effectuée au Département des structures et ouvrages d'art du Laboratoire central des Ponts et Chaussées, a fait l'objet d'une thèse en vue de l'obtention du diplôme de Docteur-Ingénieur, soutenue en novembre 1974 devant la Commission d'examen présidée par le Professeur Siestrunck, de l'Université de Paris VI.

Sommaire

Résumé en français	5
Chapitre I — Introduction	8
Chapitre II — Effets de la température sur les valeurs des réactions d'appui des ponts hyperstatiques en béton précontraint	21
II.1 Introduction	25
II.2 Théorie et calcul	27
II.3 Influence des câbles de précontrainte	34
II.4 Analyse de la méthode	38
Chapitre III — Théorie du fluage linéaire du béton	41
III.1 Introduction	46
III.2 Définitions	46
III.3 Linéarité et principe de superposition dans le temps	49
III.4 Influence de l'âge du béton au moment de sa mise en charge	53
III.5 Déformation élastique ou réversible instantanée, déformation réversible différée et déformation irréversible (flow)	55
III.6 Rhéologie du béton	57
III.7 Application aux systèmes hyperstatiques	79
Chapitre IV — Théorie du fluage linéaire du béton et de la relaxation des aciers combinés	87
IV.1 Introduction	90
IV.2 Comportement rhéologique de l'acier	91
IV.3 Equation fondamentale	93
IV.4 Redistribution des efforts par fluage dans les ponts construits par encorbellement	101
Chapitre V — Instruments de mesure et corps d'épreuve	111
V.1 Introduction	113
V.2 Caractéristiques principales du pont de Champigny-sur-Yonne et du pont de Tourville-la-Rivière	114
V.3 Dispositifs expérimentaux mis en place	118

Chapitre VI — Résultats obtenus et interprétation	131
VI.1 Dimensionnement d'une poutre à moment d'inertie constant à deux travées continues, coulée sur cintre et décoffrée en une seule phase	132
VI.2 Pont de Champigny-sur-Yonne	165
Chapitre VII — Conclusion	204
Résumé en anglais, allemand, espagnol, russe	206

résumé

*Nos lecteurs étrangers trouveront ce résumé traduit
en anglais, allemand, espagnol et russe en fin de rapport.
Our readers will find this abstract at the end of the report.
Unsere Leser finden diese Zusammenfassung am Ende des Berichtes.
Nuestros lectores hallarán este resumen al final del informe.
Русский текст аннотации помещен в конце отчета.*

REDISTRIBUTION DES EFFETS HYPERSTATIQUES DES PONTS EN BETON PRECONTRAINTE PAR FLUAGE LINEAIRE

Le calcul des variations de réactions hyperstatiques, fondé sur l'examen séparé du fluage et retrait du béton d'une part, et de la relaxation des aciers de précontrainte d'autre part, s'est révélé insuffisant pour expliquer les phénomènes observés sur l'ouvrage instrumenté. La prise en compte de l'interdépendance du comportement rhéologique de ces deux matériaux associés dans le béton précontraint, sur laquelle repose la théorie que nous avons développée, traduit de manière satisfaisante les phénomènes observés.

Les phénomènes thermiques ont, sur le comportement d'ensemble des ouvrages étudiés, une influence non négligeable dont il est possible de tenir compte d'une manière simple en incluant aux actions extérieures exercées sur un ouvrage l'action d'une différence de température d'au moins 5° C entre les faces supérieures et inférieures du tablier. Une méthode de calcul précise de cet effet est développée à partir des résultats de mesures de température.

MOTS CLES - 24 - Thèse - rapport de recherche - pont - béton précontraint - fluage - linéaire - hyperstatique - force - pile - température relaxation (mec) - acier - béton hydraulique - mesure - calcul - expérimentation - retrait

CHAPITRE I

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Dans le domaine des Ouvrages d'Art, il existe essentiellement deux catégories de constructions : Ponts métalliques et Ponts en béton armé ou précontraint. Il est vrai que les plus grands, les plus longs et les plus beaux ponts, surtout aux Etats Unis, étaient réalisés autrefois en recourant à la matière noble : l'acier. La technique des ponts en béton précontraint, construits soit sur cintre, soit par encorbellements successifs soit par la méthode dite de "poussage", bien que d'apparition relativement récente, (un peu plus de 30 ans), s'est développée prodigieusement grâce aux voies tracées à l'initiative du grand ingénieur Eugène FREYSSINET dans le monde entier sous les signes de la qualité de la réalisation et de l'économie. Le matériau exceptionnel que constitue le béton moderne, grâce à sa régularité, sa résistance et sa bonne tenue à la corrosion, présente malheureusement une insuffisance quant à la résistance à la traction. Par conséquent il ne peut jamais être considéré, même avec le concours de l'acier passif, comme essentiel pour les structures de grande portée.

Les ponts métalliques, permettent d'atteindre un niveau esthétique évident et un poids propre inférieur à celui d'autres matériaux tout en vérifiant la loi la plus fondamentale: au fur et à mesure que la portée augmente, il devient de plus en plus nécessaire d'employer le matériau le plus léger (à résistance égale) ; ils se construisent, sauf exceptionnellement en Amérique du Nord, de moins en moins par souci d'économie.

Les ponts en béton précontraint, pouvant franchir le seuil de 20 m de portée des poutres en béton armé, ont donné lieu à des réalisations spectaculaires tant en France qu'à l'Etranger, mais se sont heurtés à la difficulté de mise en place des échafaudages et des cintres, toujours gênants pour la navigation ou la circulation.

L'idée de créer des moyens de se passer d'échafaudage à l'aide d'équipements appropriés (poutre de lancement, mâts, ponton-mâturation, etc...), est de lancer des poutres préfabriquées. Mais cette méthode ne peut guère être employée pour des portées supérieures à 50 ou 60 mètres, à cause du poids propre des poutres et appareils de lancement, la méthode dite en encorbellement fut ainsi créée. Elle consiste à construire l'ouvrage "à l'avancement", c'est-à-dire à faire supporter par la partie déjà construite les coffrages et appareils permettant d'exécuter une nouvelle tranche, laquelle sera utilisée à son tour, lorsqu'elle aura acquis une résistance suffisante et qu'elle sera précontrainte pour supporter la tranche suivante et ainsi de suite. Les premiers ponts en béton précontraint construits en encorbellement à partir des culées, avec ancrage des câbles de précontrainte dans celles-ci furent le pont de Luzancy (1945), de 55 m de portée, et cinq ponts de 75 m de portée sur la Marne (1948-1950).

Les premiers grands ouvrages furent construits en Allemagne à partir de 1952. Nous pouvons citer le pont sur le Rhin, à Worms, avec ses trois travées de 101, 114 et 104 m et le pont sur la Moselle à Coblenze, avec ses trois travées de 102, 114 et 123 m. Dans ces ouvrages, la précontrainte est réalisée par barres et les travées comportent en leur milieu des articulations assurant la transmission des efforts tranchants, mais ne gênant ni les rotations, ni les déformations longitudinales. Plus tard en 1966, le pont de Bendorf atteint un record de portée de 208 m.

Entre-temps, le procédé s'est répandu dans plusieurs pays, et les ouvrages construits se diversifient très rapidement : utilisation des divers procédés de précontrainte, et surtout, recours à des systèmes statiques variés parmi lesquels les travées continues finissent par prendre la prépondérance (suppression des articulations en milieu de travée). A cette époque, l'école française, tout en s'inspirant de "l'étude complète de l'équilibre des corps élastoplastiques à trois dimensions, compte-tenu du fluage linéaire" faite par M. Aroutiounian dans son remarquable ouvrage "Applications de la théorie du fluage", commence à s'intéresser, au point de vue théorique, à l'influence du fluage linéaire sur l'équilibre des systèmes

hyperstatiques en béton précontraint. Nous discuterons plus loin ce sujet.

En France, le premier pont réalisé en encorbellement fut, en 1956, celui de CHAZEY, sur l'Ain : trois travées de portée respective 41,20 m, 57,60 m et 41,20 m, la travée centrale comportait une articulation en son centre. Nous pouvons citer aussi les ponts de BEUCAIRE (5 travées de 81,20 m) et de SAVINES (Sept travées de 77 m et deux travées de rive de 38,50 m). Par la suite, on abandonna le système des articulations centrales pour adopter la continuité de l'ensemble des travées ; les premiers ouvrages continus furent étudiés par la S.T.U.P. Il s'agit des ponts de LACROIX-FALGARDE dans l'Ariège (trois travées continues de 30,25 m, 60,65 m, et 30,25 m) et de GONCELIN sur l'Isère (trois travées continues de 29,35 m, 59,10 m et 29,35 m) tous deux achevés en 1962. Parmi les ouvrages continus réalisés dans les années suivantes, nous pouvons citer :

- en 1963, le pont du VALLON DU MOULIN à POUDRE à BREST à travées continues de 44,74 m, 81,84 m et 44,74 m, encastrées sur les piles.
- en 1964, le pont de la CHARMES, sur le canal d'amenée de la chute de Beauchastel à trois travées continues de 57,30 m, 85,40 m et 57,40 m.
- en 1966, le viaduc ILE D'OLERON-CONTINENT, long de 2682 m, répartis en quarante six travées, dont vingt six mesurent 79 m de portée.
- en 1967, le pont de la PYLE, sur la retenue du barrage de Vouglans, quatre travées continues de 65, 110, 110 et 65 m de portée, encastées sur leurs trois piles intermédiaires.
- en 1968, le pont de GIVORS, sur le Rhône, cinq travées continues de 30, 110, 20, 110 et 30 m de portée.
- en 1969, le pont d'OISSEL, sur la Seine, neuf travées continues totalisant 750 m de longueur, dont cinq travées centrales de 100 m

de portée.

Le procédé de la construction par encorbellement est actuellement utilisé dans une très large gamme de portées, dont les plus utilisées vont de 55 m à environ 160 m. Il s'avère que les portées les plus économiques sont de 60 m à plus de 110 m. Quant aux records de la longueur de la portée c'est le pont sur la baie URATO à KOCHI (JAPON), avec sa travée centrale de 230 m de portée, articulée en son milieu. Un deuxième pont de même portée va être construit aux U.S.A., malgré le manque d'expérience (il y a seulement un pont construit en encorbellement sur CORPUS CHRISTI, à Texas U.S.A. avec une travée centrale de 200' = 60,96 m et une longueur totale de 3280' = 999,74 m) le projet du pont des Trois Soeurs sur le Potomac, envisage une travée centrale de 228,60 m. Ces grandes travées ne sont pas encore répandues en France essentiellement par manque de grandes brèches à franchir ; signalons cependant, parmi les ouvrages dont la construction va commencer ou a déjà commencé :

- 1 - Le viaduc de CALIX à Caen, 1185 m de long,
- 2 - Le viaduc de SAINT-ANDRE-DE-CUBZAC, 1174 m de long,
- 3 - Le pont du BONHOMME, sur le Blavet, ouvrage à béquilles, dont la portée est d'environ 186 m entre pieds des béquilles.

La technique de construction d'Ouvrages d'Art ne s'est pas arrêtée là ; l'école française, en s'inspirant du principe du pousage des ponts métalliques et de certains ponts en béton, d'ailleurs très peu répandu à cette époque, (Pont sur le RIO CARONI au Vénézuéla et certains viaducs en Italie), a développé un nouveau procédé d'exécution des ponts en béton précontraint, à l'occasion de la construction de l'aqueduc de l'Abéou pour la société du canal de Provence (143 m de longueur), consistant à bétonner le tablier par éléments successifs sur le remblai d'accès à l'ouvrage définitif et ensuite à le déplacer à l'aide de vérins de traction en le faisant glisser sur des appuis mobiles à faible coefficient de frottement (téflon sur aciers inox) disposés sur les culées et les piles. Les principaux avantages de ce mode de construction sont les suivants :

1 - L'ouvrage est presque entièrement et quelquefois entièrement construit à terre,

2 - Le coulage du tablier peut être entrepris au moment de la construction des appuis, même avant ceux-ci, la réalisation du tablier est elle-même très rapide. Par conséquent la durée du temps de construction peut diminuer pour certains ouvrages de moitié.

3 - Le poussage, (avec l'ancien procédé, pendant un cycle de poussage, la moitié du temps était consacrée au déplacement longitudinal, l'autre moitié étant occupée par les mouvements verticaux ascendants et descendants du tablier) est actuellement continue et très rapide (8 m à l'heure au viaduc du LUC) enfin le peu de matériel nécessaire au poussage du tablier et la légèreté de l'étalement doivent entrer aussi en ligne de compte.

Avec ce procédé, suivant les dimensions des brèches à franchir deux types de construction peuvent être envisagés :

- Petites brèches (inférieures à 200 m) ; le tablier est construit en deux moitiés sur chacun des remblais d'accès ; chaque demi-tablier est ensuite poussé de façon isostatique à son emplacement définitif ; un clavage central réalise la continuité de l'ouvrage.

- Grandes brèches (sans limitation) : l'ouvrage est construit sur l'une des rives et poussé à l'avancement avec alternance de phases de bétonnage du caisson sur le remblai d'accès et de phases de poussage.

Nous citons quelques ouvrages réalisés avec cette technique :

1 - Pont de Champigny-sur-Yonne

Caisson rectiligne - longueur 140 m - portées 35 m - 70 m -
35 m - Hauteur 3,35 m - largeur 10,25 m.

2 - Pont sur le Cher à Vierzon

Caisson rectiligne - longueur 120 m - Portées 30 m, 60 m, 30 m
Hauteur 2,70 m - largeur 11,70 m.

- 3 - Pont sur l'Oum Er'Rbia (Maroc)
Caisson rectiligne - longueur 140 m - portées 35 m, 70 m, 35 m
Hauteur 3,35 m - largeur 10,25 m.
- 4 - Viaduc de la Boivre à Poitiers
Caisson rectiligne - longueur 287 m - portées 43 m, Hauteur 2,5 m
Largeur 13,40 m.
- 5 - Pont sur l'Olifants Rivers (Afrique du Sud)
Caisson rectiligne - Longueur 1035 m - portées 45 m
Hauteur 3,80 m - largeur 5,50 m.

Dans les villes, on construit de plus en plus de nouveaux ponts soit à cause de l'augmentation du trafic soit pour remplacer les anciens ponts vétustes. La construction avec poussage se heurte au manque d'espace perpendiculaire à la rivière. C'est la raison pour laquelle des ingénieurs allemands construisent des ponts en béton précontraint le long des rivières et en les faisant tourner dans la position définitive. Certains ingénieurs même pensent construire des ponts entiers dans des usines de préfabrication et les transporter par des aéronefs dirigeables jusqu'à leur emplacement définitif.

Du point de vue de la recherche sur le béton précontraint en laboratoire, l'étude se concentre sur les domaines suivants :

- 1 - Propriétés mécaniques (béton de haute résistance, béton léger, ciments pour coulis d'injection etc...) et rhéologiques (fluage relaxation etc...) du béton et de l'acier.
- 2 - Diffusion des lignes isostatiques à l'ancrage des câbles.
- 3 - Répartition des contraintes dues à la surcharge extérieure (torsion, effet thermique etc...)
- 4 - Redistribution des efforts dans les structures hyperstatiques due au fluage, retrait et relaxation des matériaux.

Dans le domaine de la recherche sur le béton de haute résistance, un gros travail a été accompli aux Etats-Unis, en Allemagne, au Japon. Pour le béton léger, les Etats-Unis, La Grande Bretagne et l'U.R.S.S. (surtout dans les bâtiments) ont acquis beaucoup de connaissances. Des ponts de 40 à 50 m ont déjà été construits. Par contre, les ponts de grande portée sont très rares à cause de la connaissance imparfaite des propriétés rhéologiques du béton léger.

La recherche des propriétés rhéologiques du béton est effectuée dans presque tous les grands laboratoires d'essais ou de recherche. Elle repose essentiellement sur les essais suivants :

- a) - Essais de fluage du béton sous une force extérieure constante ou variable dans le temps (contraintes imposées),
- b) - Essais de fluage du béton sous une déformation imposée constante ou variable dans le temps (déformations imposées),
- c) - Influence de l'âge du béton au moment de sa mise en charge sur le fluage du béton.

Etant donné que les essais de déformations imposées sont très difficiles à mettre au point, les ingénieurs, les chercheurs préfèrent des essais de fluage avec "contraintes imposées". Dans ce domaine, plusieurs centaines d'articles ont déjà été publiés. Nous citerons seulement quelques noms :

France : DAWANCE G., CHAGNEAU A., CRUSSARD C., VENUAT M., DREUX,
l'HERMITE R., MITZEL A., COURBON J., FAUCHART J.,

U.R.S.S. : O.Ja.BERG, VASILJEV P.I., GVOZDEV A.G., DISCHINGER F.,
TROST H., WAGNER D.,

Grande Bretagne : BLAND, ROSS A.D., GLANVILLE W.H., THOMAS F.G.,

Italie : LEVI F., CHIORINO M.A.,

U.S.A. : BAZANT Z.P., HENRY d.Mc.,

Canada : DILGER W., GHALI A., KOUNTOURIS C.,

Quant à la recherche des propriétés rhéologiques des aciers, il y a peu d'ingénieurs qui s'intéressent à ce problème. A notre connaissance, il n'y a que des ingénieurs du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées à Paris qui introduisent la notion de "seuil" de tension des aciers (en dessous duquel les phénomènes de fluage et de relaxation sont négligeables) pour établir des équations de base.

Le souci de sécurité de construction a incité les ingénieurs à se servir des résultats des essais en laboratoire de fluage et de retrait d'une part et de relaxation des aciers d'autre part, pour mettre au point certains règlements et recommandations pour des structures en béton précontraint en additionnant les 3 phénomènes suivants : le fluage du béton, la relaxation des aciers et le retrait du béton.

Au point de vue de la méthode de calcul pour des structures hyperstatiques, une méthode s'est développée se fondant sur le fluage du béton d'une part et la précontrainte considérée comme force extérieure constante dans le temps, d'autre part.

Cette méthode de calcul a pour conséquences les deux points intéressants suivants :

- 1 - Les réactions hyperstatiques ne changent pas en fonction du temps si la structure est construite sur cintre.
- 2 - Sous l'effet de déformations imposées, l'équilibre de la structure hyperstatique dont le schéma statique est variable, évolue dans le temps vers un équilibre limite.

Nous allons développer cette méthode en détail au chapitre III. Il s'est avéré, à la suite de divers résultats expérimentaux et mesures directes sur ouvrages en service, que ce cumul de 3 termes conduit à une surestimation quelque fois importante des pertes réelles du fluage de l'ordre de 10 et 20 %, et que cette méthode de calcul conduit à une sous-estimation de la redistribution des efforts hyperstatiques.

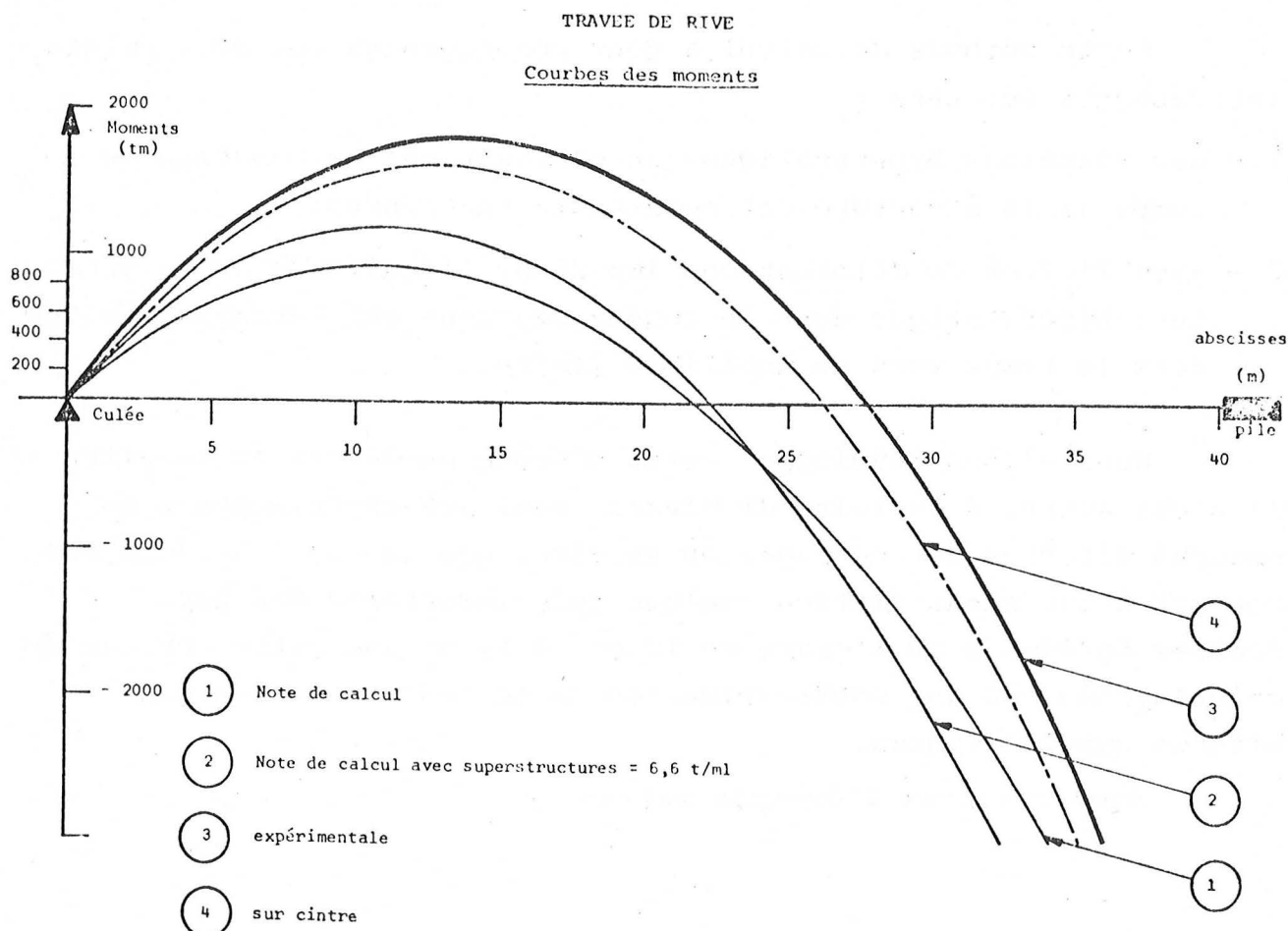
Nous citerons l'exemple suivant :

Le tablier d'un ouvrage en béton précontraint construit en encorbellement par voussoirs successifs coulés en place (1955-1957), présente des défauts inquiétants : larges fissures de moment fléchissant, fissures d'effort tranchant etc.... Pour comprendre la cause de ces défauts, on a appliqué différentes techniques d'auscultation : fissurographie, auscultation dynamique du béton, pesée des réactions d'appui, mesures de contraintes internes dans le béton par libération. Nous citons quelques résultats importants de cette enquête :

1 - Réaction d'appuis et contraintes

	Note de calcul	Résultats mesurés
Contraintes dans une section située à 15,4 m de la culée	$\sigma_{\text{sup}} = 236 \text{ t/m}^2$ $\sigma_{\text{inf}} = 795 \text{ t/m}^2$	$\sigma_{\text{sup}} = 512 \text{ t/m}^2$ $\sigma_{\text{inf}} = 29 \text{ t/m}^2$
Réaction d'appui	196 t	290 t

2 - Moments



Il est intéressant de comparer les courbes de moments sous poids propre réellement obtenues à celles qui avaient été calculées initialement. On constate que les moments de certaines sections ont changé de signe.

3 - Flèche

La flèche due au fluage (en milieu de travée), au bout de quinze ans de service, atteint 139 mm.

La conclusion de cette recherche est très intéressante, nous citons :

Les résultats obtenus ne permettent pas d'établir l'historique des dégradations ni de préciser quel fut le "détonateur" ayant finalement provoqué les désordres constatés.

Ils permettent cependant de mettre clairement en évidence le rôle important joué par l'adaptation du béton dans le processus de dégradation.

Ce pont est actuellement interdit à la circulation et va bientôt être démoli.

Cet exemple extrême n'est pas isolé. On a pu constater dans certains ponts construits en encorbellement des déplacements verticaux inquiétants et des fissures verticales sur les ponts à voussoirs dus aux effets de la redistribution par fluage.

Ainsi il apparaît nécessaire de partir d'une conception différente du comportement du matériau.

L'élément précontraint est composé de béton et d'acier. Les deux matériaux coexistent dans le même corps, la variation de contrainte ou de déformation de l'un influence l'autre immédiatement sans intervention extérieure, ainsi se crée un système en interdépendance et en auto-équilibre permanent. Il est évident que la simple superposition des phénomènes intéressant le béton et l'acier pris séparément ne peut rendre compte de manière satisfaisante du comportement global de l'élément précontraint même si l'on fait

intervenir des coefficients correctifs déterminés de manière empirique. Cette remarque est valable également pour les structures hyperstatiques, dans lesquelles chaque section doit être considérée comme un élément précontraint soumis aux phénomènes d'interdépendance et aussi comme une partie d'un système viscoélastique, dans lequel se développent les moments hyperstatiques dus à la redistribution. Pour essayer de décrire ces phénomènes nous avons développé une nouvelle méthode de calcul au chapitre IV. Dans cette méthode, nous avons tenu compte non seulement de l'interdépendance entre l'acier et le béton, mais aussi des moments hyperstatiques redistribués ainsi que des phases de construction (âge des voussoirs à la mise en contrainte, et au clavage).

L'application de cette méthode de calcul nécessite l'utilisation d'un ordinateur, mais contrairement aux apparences, ce calcul demande peu de temps et de capacité de mémoire à la condition que le programme soit bien adapté au problème.

Parallèlement nous avons effectué des mesures de longue durée sur des ouvrages construits en utilisant notamment les techniques et appareillages suivants :

- 1) Mesure des réactions d'appui par pesons hydrauliques
- 2) Mesure des déformations par extensométrie
- 3) Sondes de température
- 4) Mesure des déplacements verticaux par nivellement optique.

Par suite de la durée des essais, des appareils de mesures possédant une très grande stabilité à long terme ont dû être mis au point, et en particulier des pesons hydrauliques ont été fabriqués spécialement pour cette recherche. Nous discuterons cet aspect de l'étude dans le chapitre V.

Les premières mesures ont fait apparaître des variations des réactions sur culée de 25 % au cours de la journée. Cet élément imprévu a rendu nécessaire l'étude d'une méthode de correction des effets thermiques, décrite au chapitre II.

Malgré les difficultés rencontrées au cours de cette recherche, des résultats très satisfaisants ont été obtenus aussi bien sur le plan expérimental que sur le plan théorique.

Nous espérons que les ingénieurs de bureaux d'études, ayant l'habitude des anciennes méthodes de calcul pourront facilement assimiler cette nouvelle méthode. Il deviendra alors possible de recalculer certains ponts dimensionnés suivant les méthodes courantes afin de prévoir d'éventuelles dégradations et de les prévenir.

Enfin nous pensons que "la valse de trois pas" de recherche (essais, théorie, application) est pleinement réalisée.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES DU CHAPITRE I

- I.1. MM. LAUNAY P., BAUM P., CHASSAGNETTE P., et STOUFF H.
Une nouvelle méthode de construction des ouvrages de franchissement en béton précontraint "le poussage".
Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics - Mai 1970 n° 269 - France.
- I.2. CHASSAGNETTE M.P.,
Ponts lancés par poussage
7ème congrès de la Fédération internationale de la précontrainte
Contributions techniques françaises - New-York 1974
- I.3. GUYON M.Y.,
Construction en béton précontraint (Tome 2)
Cours CHEBAP (PARIS)
- I-4. HENNEBERGER W., BREEN J.,
First segmental bridge in the U.S.
Civil engineering June 1974, U.S.A.
- I.5. Structures précontraintes
Chambre syndicale nationale des constructeurs en ciment armé et béton précontraint, France.
- I.6. Ponts en béton précontraint construits par encorbellement successifs.
SETRA Bulletin technique n° 7
Ministère de l'Aménagement du Territoire de l'Equipement, du Logement et du Tourisme, France.
- I.7. Essai d'explication des désordres apparus sur un pont en béton précontraint à voussoirs coulés en place par Ph. LEGER et J. CHATELAIN.
Problèmes spéciaux d'étude et d'exécution des ouvrages
Journées A.F.P.C. - 22 et 23 Avril 1974 - France.

Afin de faciliter les recherches, nous avons limité cette bibliographie aux principaux ouvrages et articles publiés, en laissant volontairement à l'écart certains articles que nous pouvons trouver dans les références bibliographiques des chapitres II, III, IV, V et VI.

CHAPITRE II

EFFETS DE LA TEMPÉRATURE SUR LES VALEURS DES RÉACTIONS D'APPUI DES PONTS HYPERSTATIQUES EN BÉTON PRÉCONTRAIT

SOMMAIRE

II.1.	INTRODUCTION	25
II.2.	THEORIE ET CALCUL	27
2.1.	Position du problème	27
2.2.	Calcul des réactions hyperstatiques	28
2.3.	Calcul des rotations	28
2.4.	Programme de calcul	33
II.3.	INFLUENCE DES CABLES DE PRECONTRAINTE	34
3.1.	Hypothèses	34
3.2.	Calcul	34
3.3.	Exemple simple de calcul	37
II.4.	ANALYSE DE LA METHODE	38
4.1.	Sensibilité suivant l'emplacement des sondes de température dans la section	38
4.2.	Emplacement des sections équipées le long du pont	38

NOTATIONS

Coefficients de souplesse de la travée i

$$a_i = \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{z}{l_i}\right)^2 \frac{dz}{EI}$$

$$b_i = \int_0^{l_i} \frac{z}{l_i} \left(1 - \frac{z}{l_i}\right) \frac{dz}{EI}$$

$$c_i = \int_0^{l_i} \left(\frac{z}{l_i}\right)^2 \frac{dz}{EI}$$

M_i : moment hyperstatique sur l'appui i

ω'_i : rotation isostatique à gauche de la travée i

ω''_i : rotation isostatique à droite de la travée i

S : aire de la section

W : déplacement réel d'un point de l'ouvrage suivant l'axe longitudinal oz

w : partie linéaire du déplacement d'un point de l'ouvrage dans le sens oz.

$\phi(x,y,z)$: partie non linéaire du déplacement d'un point du pont dans le sens oz. $W = w + \phi$

$\xi(z)$: déplacement horizontal, vertical et suivant l'axe oz

$\eta(z)$ (respectivement.

$\zeta(z)$)
(
)

T(x,y,z) : température réelle d'un point du pont

$\psi(x,y,z)$: partie non linéaire de la température T(x,y,z)

$t_0(z)$)
(

$t_1(z)$) Composantes de température
(

$t_2(z)$)
(

- I_x)
 (
 I_y)
 (
 Moments d'inertie d'une section par rapport aux axes
 x et y respectivement
- α_i : Coefficient de dilatation du matériau
- $P_t^i(z)$ Variation de précontrainte due à la température dans
 le câble i
- G : Rigidité de gauchissement
- e_B : Déformation du béton due à la variation de température
- e_B^c : Déformation du béton due à la variation de précontrainte
- $e_{B+B}^c = e_B^c + e_B$
- e_c : Déformation du câble
- A : Matrice de rigidité généralisée d'une section (y compris
 la contribution du gauchissement du béton et des câbles
 actifs).
- B : Matrice des températures.

II - EFFETS DE LA TEMPÉRATURE SUR LES VALEURS DES RÉACTIONS D'APPUI DES PONTS HYPERSTATIQUES EN BÉTON PRÉCONTRAIN

II.1. INTRODUCTION

Dans le but d'étudier l'évolution à long terme des efforts hyperstatiques dans les ponts en béton précontraint, trois ouvrages en béton précontraint ont été équipés d'un appareillage permettant :

- 1 - La pesée des réactions d'appui sur culées (par pesons hydrauliques situés à l'emplacement des appuis de culée),
- 2 - La détermination de la répartition de la température dans différentes sections (par sondes de température implantées dans l'épaisseur des âmes et des hourdis).
- 3 - La mesure des déplacements et des déformations dans certaines sections (mesure de flèches et extensométrie).

Des mesures effectuées à intervalles réguliers (un mois) et aussi sur des périodes de 24 heures ont permis de mettre en évidence l'importance des phénomènes thermiques. Nous avons pu ainsi constater des variations des réactions d'appui hyperstatiques de l'ordre de 25 % de la valeur moyenne en 24 heures. (fig. 2.1.).

Ce facteur qui rend difficile l'interprétation des résultats pour l'étude des effets de longue durée mérite donc d'être examiné avec soin.

II.1.1. Paramètres décrivant le comportement thermique d'un pont

II.1.1.1. Matériau

- a) - Les caractéristiques thermiques des matériaux sont représentées par le coefficient de dilatation α qui dépend de la température

ambiante et du degré hygrométrique.

b) - Les caractéristiques mécaniques du matériau, module d'élasticité E et coefficient de Poisson ν dépendent de la température et de l'hygrométrie.

II.1.1.2. Structure

Outre les paramètres propres au matériau interviennent d'autres facteurs liés à l'ouvrage lui-même. Ainsi :

a) L'emplacement du pont

- exposition
- nature de la zone franchie

(la réverbération varie suivant qu'on se trouve au dessus d'une rivière ou d'un champ).

b) Les caractéristiques géométriques de l'ouvrage

- forme des sections (distribution de la température, zones d'ombres et zones ensoleillées),
- épaisseur des différentes parties de l'ouvrage (répartition de la température suivant l'épaisseur).
- caractéristiques d'inertie
- conditions de surface (influence du revêtement).

Ces différents facteurs ont fait l'objet d'études séparées, théoriques (à partir de la résolution de l'équation de la chaleur) ou expérimentales comme la mesure des températures en plusieurs points répartis dans l'épaisseur de dalles de béton (références II.1, II.2 et II.3).

Plutôt qu'aux effets locaux de déformation thermique de la structure, nous nous sommes attachés à la mise au point d'une méthode de calcul simple et rendant compte d'une manière satisfaisante du comportement global des ouvrages équipés, qui se traduit en fait pour nous par des variations de réactions d'appui. L'étude de l'implantation optimale de sondes de température sur l'ouvrage

présente également un grand intérêt pratique.

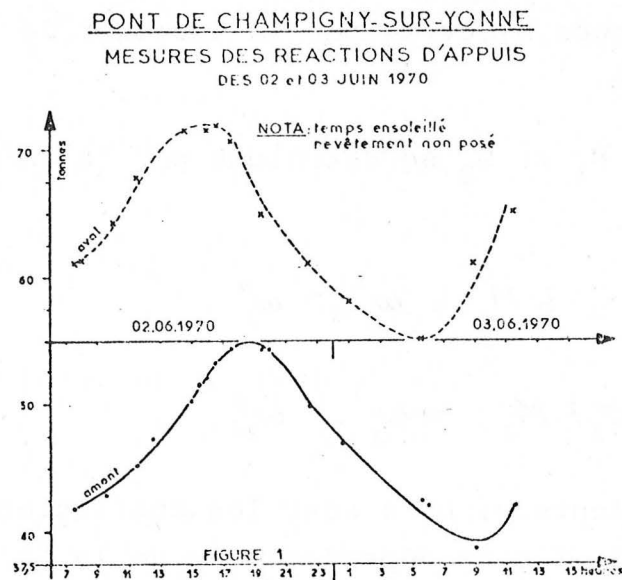


FIG. II-1

II.2. THEORIE ET CALCUL

II.2.1. Position du problème

Les ponts étudiés comportent trois travées.

Si on considère que les appuis sont simples, chacun de ces ponts est donc 2 fois hyperstatique ; il en résulte que l'action de la température va se traduire par des déformations qui, si elles sont incompatibles avec les liaisons, vont provoquer des réactions d'appui.

Chaque pont est équipé en certaines de ses sections, de sondes de température, et en chacun de ses appuis de rive, de pesons qui permettent la mesure des réactions de ces appuis.

Nous allons chercher la fonction qui permet de prendre en

compte les mesures de température et qui fournit les réactions hyperstatiques dues au champ de température.

II.2.2. Calcul des réactions hyperstatiques

Les réactions d'appuis de rive s'obtiennent en divisant les moments hyperstatiques M_1 et M_2 par la longueur de la travée de rive correspondante.

Les moments M_1 et M_2 se calculent par la formule des trois moments :

$$(a_1 + c_2) M_1 - b_2 M_2 = \omega'_2 - \omega''_1 \quad 2-1$$

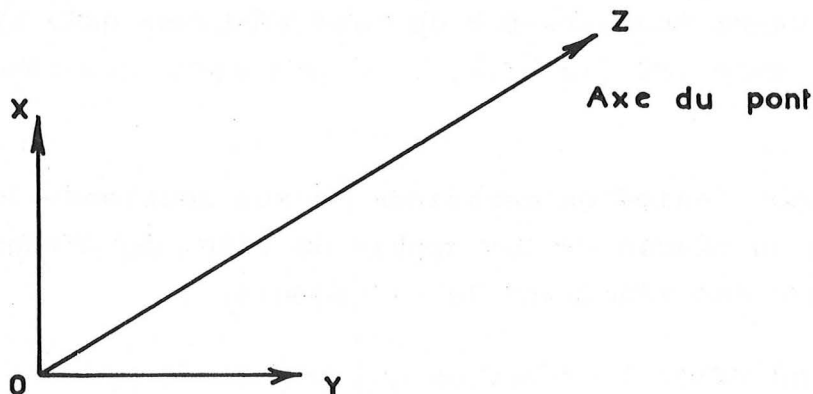
$$b_2 M_1 - (a_2 + c_3) M_2 = \omega'_3 - \omega''_2 \quad 2-2$$

Les coefficients a , b , c sont les coefficients de souplesse des travées 1, 2, 3. Ils ne dépendent que de la forme géométrique du pont.

Les rotations ω'_1 ω'_2 ω'_2 ω'_3 sont les rotations sur appuis obtenues en appliquant le même cas de charge (ici le champ de température) aux travées rendues isostatiques. Le problème se ramène donc au calcul de ces rotations, dans l'hypothèse où l'on connaîtrait partout le champ de température.

II.2.3. Calcul des rotations

a) Introduction



- chaque section est repérée par les coordonnées x et y .
- le plan yOz est plan de symétrie du pont.
- le point O est le centre de gravité de la section considérée ; les axes Ox et Oy sont donc les axes principaux d'inertie de la section.
- d'autre part, la coordonnée z permet de repérer les sections selon l'axe longitudinal du pont.

Soit $W(x,y,z)$ le déplacement du point de coordonnées (x,y,z) dans le sens Oz .

On ne fait aucune hypothèse sur la forme de la fonction $W(x,y,z)$, et on cherche la fonction linéaire en x et y qui approche le mieux $w(x,y,z)$.

$$W(x,y,z) = W(x,y,z) + \phi(x,y,z) \quad 2-3$$

$$\text{avec } W(x,y,z) = \zeta(z) - \xi'(z)x - \eta'(z)y \quad 2-4$$

La meilleure fonction $W(x,y,z)$ est celle qui rend minimale la distance :

$$d^2 = \int_S \phi^2 dS \quad 2-5$$

S est l'aire de la section de coordonnée z .

b) Calcul des coefficients de la fonction linéaire w .

Minimisons la quantité :

$$\begin{aligned} d^2 &= \int_S \phi^2 dS = \int_S [W - \zeta + \xi'x + \eta'y]^2 dS \\ d^2 &= \int_S W^2 dS - [2\zeta \int_S W dS - \zeta^2 \int_S dS] + \\ &\quad + [2\xi' \int_S Wx dS + \xi'^2 \int_S x^2 dS] + \\ &\quad + [2\eta' \int_S Wy dS + \eta'^2 \int_S y^2 dS] \end{aligned}$$

Les trois autres termes contiennent

$$\int_S x dS, \int_S y dS, \int_S xy dS \quad \text{qui sont nuls par hypothèse (axes principaux)}$$

Il faut et il suffit donc (ζ , ξ' , η' étant indépendants)

$$\zeta = \frac{\int_S W dS}{S} \quad 2-6$$

$$\xi' = \frac{-\int_S W x dS}{I_x} \quad 2-7$$

$$\eta' = \frac{-\int_S W y dS}{I_y} \quad 2-8$$

La fonction ϕ vérifie alors :

$$\int_S \phi dS = 0 \quad 2-9$$

$$\int_S \phi x dS = 0 \quad 2-10$$

$$\int_S \phi y dS = 0 \quad 2-11$$

ϕ est le résidu du développement par rapport aux fonctions $\frac{1}{S}$, $\frac{x}{I_x}$, $\frac{y}{I_y}$ orthonormées sur S.

c) Introduction de la température.

La température est supposée connue par une fonction $T(x, y, z)$.

En faisant le même calcul que précédemment, on cherche les fonctions $t_0(z)$, $t_1(z)$, $t_2(z)$ et $\psi(x, y, z)$ telles que :

$$T(x, y, z) = t_0(z) + x t_1(z) + y t_2(z) + \psi(x, y, z) \quad 2-12$$

et l'on obtient les relations :

$$t_0 = \frac{\int_S T dS}{S} \quad 2-13$$

$$t_1 = \frac{\int_S x T dS}{I_x} \quad 2-14$$

$$\int_S \psi dS = 0 \quad 2-16$$

$$\int_S \psi x dS = 0 \quad 2-17$$

$$t_2 = \frac{\int_S T_y dS}{I_y} \quad 2-15 \quad \int_S \psi y dS = 0 \quad 2-18$$

d) Contraintes normales et équations d'équilibre.

Puisque l'on considère une travée isostatique sur appuis simples, soumise seulement à l'action de la température, on peut écrire pour chaque section :

$$\int_S \sigma dS = 0 \quad N = 0 \quad 2-19$$

$$\int_S \sigma x dS = 0 \quad M_x = 0 \quad 2-20$$

$$\int_S \sigma y dS = 0 \quad M_y = 0 \quad 2-21$$

e) Relation entre contrainte et déformation.

Si l'on néglige les contraintes normales dans les directions transversales, la déformation longitudinale s'écrit :

$$\frac{\partial W}{\partial z}(x, y, z) = \alpha T(x, y, z) - \frac{\sigma}{E}(x, y, z) \quad 2-22$$

(loi de Hooke à une dimension)

d'où

$$\sigma = E \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \alpha T \right) \quad 2-23$$

f) Relation liant les déformations au champ de température.

On obtient 3 équations :

$$\int_S \frac{\partial W}{\partial z} dS = \alpha \int_S T dS \quad (N = 0) \quad 2-24$$

$$\int_S x \frac{\partial W}{\partial z} dS = \alpha \int_S T x dS \quad (M_x = 0) \quad 2-25$$

$$\int_S y \frac{\partial W}{\partial z} dS = \alpha \int_S T y dS \quad (M_y = 0) \quad 2-26$$

On en déduit les trois relations :

$$\zeta'(z) = \alpha t_0(z) \quad 2-27$$

$$\xi''(z) = -\alpha t_1(z) \quad 2-28$$

$$\eta''(z) = -\alpha t_2(z) \quad 2-29$$

(en prenant les décompositions de T et w)

g) Formules finales donnant la rotation.

Si on reprend l'expression de w :

$$W(x, y, z) = \zeta(z) - \xi'(z)x - \eta'(z)y + \phi(x, y, z) \quad 2-30$$

Il est clair que $\eta'(z)$ représente la rotation d'axe Ox, de la section transversale de coordonnée z, et que $\eta(z)$ représente la flèche verticale en cette section, par définition.

Il en résulte :

$$\eta''(z) = -\alpha t_2(z) \quad 2-31$$

$$\eta'(z) = \eta'(0) - \alpha \int_0^z t_2(u) du \quad 2-32$$

$$\eta(z) = \eta(0) + z \eta'(0) - \alpha \int_0^z \left[\int_0^v t_2(u) du \right] dv \quad 2-33$$

La flèche sur appui est nulle :

$$\eta(0) = 0$$

$$\eta(l) = 0$$

La rotation de la section de coordonnée z est :

$$\eta'(z) = \frac{\alpha}{l} \int_0^l \left[\int_0^v t_2(u) du \right] dv - \alpha \int_0^z t_2(u) du \quad 2-34$$

Les rotations ω cherchées sont :

$$\omega_1'' = \frac{\alpha}{l_1} \int_0^{l_1} \left[\int_0^v t_2(u) du \right] dv - \alpha \int_0^{l_1} t_2(u) du \quad 2-35$$

$$\omega_2' = \frac{\alpha}{l_2} \int_0^{l_2} \left[\int_0^v t_2(u) du \right] dv \quad 2-36$$

$$\omega_2'' = \omega_2' - \alpha \int_0^{l_2} t_2(u) du \quad 2-37$$

$$\omega_3' = \frac{\alpha}{l_3} \int_0^{l_3} \left[\int_0^v t_2(u) du \right] dv \quad 2-38$$

II.2.4. Programme de calcul

1ère phase :

$$\text{calcul de } t_2(z) = \frac{\int_s y T(x, y, z) dS}{I_y} \quad 2-39$$

$T(x, y, z)$ n'est connu qu'en quelques points de quelques sections ; il faut donc attribuer à chaque point du béton une température qui reflète le mieux possible la réalité : la température du point de mesure le plus proche, ou la température obtenue par interpolation des températures des deux points de mesure les plus proches.

Entrent en données dans cette phase de calcul :

- les températures mesurées dans chaque section équipée,
- le moment d'inertie I_y (fonction de z),

- les données géométriques de chaque section permettant de calculer le bras de levier y et l'aire dS se rapportant à la même température T .

2ème phase :

Un sous-programme permet le calcul des intégrales par la méthode des trapèzes .

En appelant 2 fois ce sous-programme, on obtient, pour tout z :

$$\int_0^z t_2(u) du$$

et

$$\int_0^z \left[\int_0^v t_2(u) du \right] dv$$

3ème phase :

Les deux intégrales précédentes permettent le calcul :

- des rotations sur appuis ω ,
- des moments hyperstatiques M (par la formule des 3 moments),
- des réactions hyperstatiques R .

II.3. INFLUENCE DES CABLES DE PRECONTRAINT

II.3.1. Hypothèses

* La déformation du béton au point x,y,z est égale à celle du câble au même point.

* La température du béton au point x,y,z est égale à celle du câble au même point.

II.3.2. Calcul

La déformation du béton s'il n'y a pas de variation de précontrainte, s'écrit :

$$\begin{aligned}
e_B(x, y, z) &= \alpha_B T(x, y, z) + \frac{\sigma_B}{E_B}(x, y, z) \\
&= \alpha_B T(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) - \alpha_B \psi(x, y, z)
\end{aligned}
\quad 2-40$$

Appelons $p_{t(z)}^i$ la variation de précontrainte due à la température dans le câble i . (positive si le câble s'allonge).

Sous l'action de $p_{t(z)}^i$, le béton va subir une déformation :

$$\begin{aligned}
e_B^c(x, y, z) &= - \frac{P_t^i(z)}{E_B S_B(z)} - \frac{P_t^i(z)}{E_B I_y(z)} y_c^i(z) y - \frac{P_t^i(z)}{E_B I_x(z)} x_c^i(z) x - \\
&\quad - G_i(x, y, z) P_t^i(z)
\end{aligned}$$

où $G_i P_{t(z)}^i$ correspond au gauchissement de la section sous l'action de la précontrainte $p_{t(z)}^i$. Près de l'emplacement (x_c^i, y_c^i, z) du câble i , la déformation du béton est donc, (en sommant sur k pour obtenir la déformation due à tous les câbles).

$$\begin{aligned}
e_{B+B}^c(x_c^i, y_c^i, z) &= e_B^c(x_c^i, y_c^i, z) - e_B(x_c^i, y_c^i, z) . \\
&= - \sum_k \frac{P_t^k(z)}{S_B E_B} - \sum_k \frac{P_t^k(z)}{I_y E_B} y_c^k y_c^i - \sum_k \frac{P_t^k(z)}{I_x E_B} x_c^k x_c^i - \sum_k G(x_c^i, y_c^i, z) P_t^k(z) + \\
&\quad - \alpha_B T(x_c^i, y_c^i, z) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_c^i, y_c^i, z) - \alpha_B \psi(x_c^i, y_c^i, z)
\end{aligned}$$

Au même point, la déformation du câble i , s'écrit :

$$e_c^i(x_c^i, y_c^i, z) = \alpha_c T(x_c^i, y_c^i, z) - \frac{P_t^i(z)}{S_c(z) E_c}$$

Par hypothèse, on a :

$$e_c(x_c^i, y_c^i, z) = e_{\beta+\beta}^c(x_c^i, y_c^i, z)$$

pour tous les i , on a donc un système de n équations à n inconnues, que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$AP = B$$

les éléments de ces matrices s'écrivent :

$$A_{ii} = \frac{1}{S_c E_c} + \frac{1}{S_B E_B} + \frac{y_c^{i^2}}{I_y E_B} + \frac{x_c^{i^2}}{I_x E_B} + G_i(x_c^i, y_c^i, z)$$

$$A_{ij} = \frac{1}{S_B E_B} - \frac{y_c^i y_c^j}{I_y E_B} - \frac{x_c^i x_c^j}{I_x E_B} - G_j(x_c^i, y_c^i, z)$$

$$P_i = P_{t(z)}^i$$

$$B_i = (\alpha_B - \alpha_c) T(x_c^i, y_c^i, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x_c^i, y_c^i, z) - \alpha_B \psi(x_c^i, y_c^i, z)$$

Le déterminant de la matrice A doit être différent de zéro, ce qui signifie le système n'est pas à configuration critique.

En admettant que l'inversion de la matrice soit faite pour tout z , la courbure $\eta''(z)$ deviendrait alors :

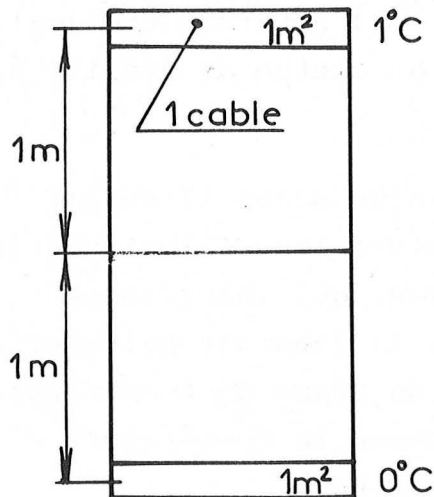
$$\eta''(z) = -\alpha t_2 - \frac{\sum P_{t(z)}^i y_c^i}{I_y E_B}$$

on voit que le calcul de l'influence des câbles est difficile. En première approximation, on peut supposer que le gauchissement est nul. La résolution est alors plus simple, mais il reste cependant à inverser A dans toutes les sections du pont.

Pour savoir quel est l'ordre de grandeur du terme introduit par P , nous allons prendre un exemple simple.

II.3.3. Exemple simple de calcul

Considérons la section schématique suivante, qui ne comporte qu'un câble :



$$S_c = 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$S_B = 2 \text{ m}^2$$

$$I_y = 2 \text{ m}^4$$

$$E_c = 15 E_b$$

$$(\alpha_B - \alpha_c) \text{ est supposé limité à } 0,5 \times \alpha_B$$

On fait pour ce calcul simple, l'hypothèse des sections planes.

On trouve alors :

$$\frac{P}{E_B} \left(\frac{1}{15 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{2} \right) = 0,5 \alpha_B$$

$$P = E_B \alpha_B \times 6,5 \cdot 10^{-2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \eta'' &= -\alpha_B t_2 + \frac{P y_c}{I_y E_B} \\ &= -\frac{\alpha_B}{I_y} - \frac{1}{I_y} \alpha_B \times 6,5 \cdot 10^{-2} \\ &= -\frac{\alpha_B}{I_y} (1 - 6,5 \times 10^{-2}) \end{aligned}$$

On trouve donc, même dans ce cas extrême ($\alpha_B - \alpha_c$ est certainement bien inférieur à $0,5 \alpha_B$) que l'influence du câble est faible. C'est la raison pour laquelle nous la négligerons dans la suite.

II.4. ANALYSE DE LA METHODE

II.4.1. Sensibilité suivant l'emplacement des sondes de température dans la section.

Dans le calcul de la fonction $t_2(z)$, il apparaît que les températures des points les plus éloignés du centre de gravité de la section vont jouer un plus grand rôle.

Dans la réalisation de l'équipement d'un pont, il serait souhaitable d'équiper de sondes de température les dalles inférieure et supérieure, plus abondamment que les âmes, qui interviennent peu dans le calcul. Avant de placer une sonde, il faudrait calculer la part de $t_2(z)$ qu'elle représentera, pour un champ de température donné ; l'idéal serait que lorsque l'on change la température d'une sonde quelconque, $t_2(z)$ varie d'une même valeur.

Si donc l'équipement des âmes peut être négligé, il paraît nécessaire de bien équiper la dalle inférieure et la dalle supérieure, y compris les encorbellements (dans la mesure du possible).

II.4.2. Emplacement des sections équipées le long du pont

Si le pont n'est pas de section constante, il est possible que la fonction $t_2(z)$ prenne selon z , des valeurs différentes, même si le champ de température est le même tout le long du pont.

$$t_2 = \frac{\int_S \bar{T}_y dS}{I_y}$$

Il convient donc de tester la sensibilité en calculant t_2 pour des sections différentes et le même champ T de températures. I_y varie en général plus vite que l'aire de la surface, et la hauteur de la poutre ; on aura donc en général intérêt à espacer les sections équipées aux abords des appuis, et à les resserrer au milieu des travées

Ce résultat n'est que sommaire, et dans chaque cas, il faudra calculer t_2 en fonction de z ; là, où t_2 est plus grand, le nombre de sections équipées devra être plus grand.

Pour le pont de Champigny, par exemple, si on donne dans la section qui se trouve près du milieu de la travée centrale, une température de 0°C à toutes les sondes, sauf à celles qui se trouvent, soit dans le hourdis supérieur, soit dans la dalle inférieure, auxquelles on attribuera la température de 1°C , les réactions d'appuis qui en résultent sont de 2 à 4 tonnes.

Dans ces conditions, la méthode risque de n'avoir aucune chance de réussir, étant donnée la sensibilité qu'on en attend.

Sur la figure II-2, est représentée la ligne d'influence de la réaction hyperstatique de culée due à un gradient de température de 1° dans la section d'abscisse x^* .

Les résultats de cette nouvelle méthode de calcul seront donnés dans le chapitre VI.

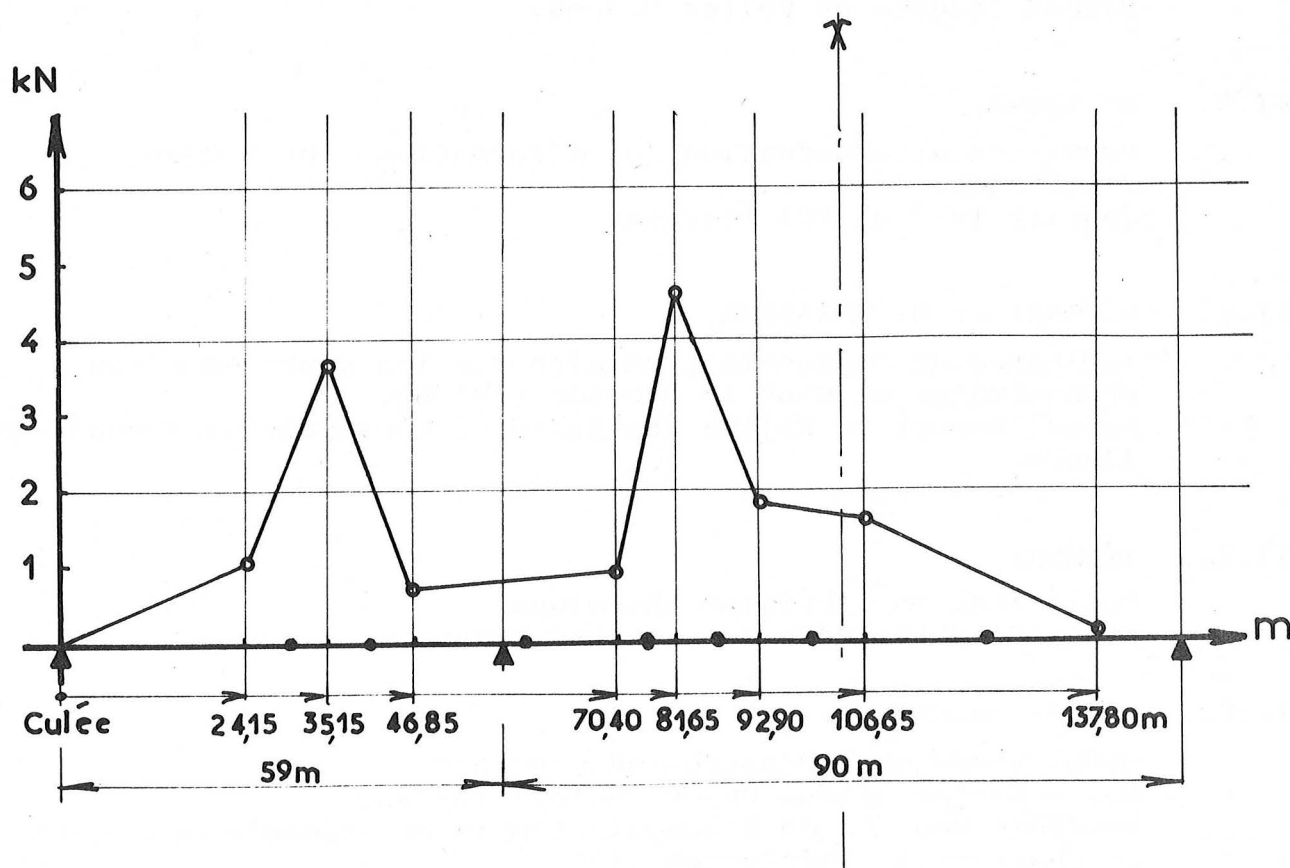


FIGURE II-2

* Le gradient uniforme de 1° est supposé appliqué sur l'intervalle centré sur section d'abscisse x suivant la figure II-2.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES DU CHAPITRE II

- II.1. MARY EMERSON B.Sc.,
Bridge Temperatures and Movements in the British Isles
Road Research Laboratory, Ministry of Transport RRL Report
LR 228.
- II.2. M.W.R. CAPPS,
The Thermal behaviour of the Beachley Viaduct/Wye bridge
Road Research Laboratory, Ministry of Transport RRL Report
LR 234.
- II.3. MARY EMERSON,
The calculation of the distribution of temperature in bridge.
Road Research Laboratory, Ministry of Transport RRL Report
LR 561.
- II.4. B.Z. VLASSOV,
Pièces longues en Voiles Minces.
- II.5. W. THOMA,
Prévision et observation des déformations thermiques
d'ouvrages.
Janvier 1973 n° 454 Travaux.
- II.6. R.IWAKI et M. NAKAYAMA,
Influence du rayonnement solaire sur les ponts en béton
précontraint suivant le procédé DYWIDAG.
Annual Report of Kajima Institute of Construction Technology
(Japon).
- II.7. BONVALET
Sollicitation d'origine thermique
Stage de pathologie des constructions.
- II.8. M.J.N. PRIESTLEY,
Model study of a prestressed Concrete.
Box - Girder Bridge Under Thermal loading
Neuvième congrès de l'association internationale des Ponts
et Charpentes - Amsterdam 1972.
- II.9. M.Y. LAU,
Contraintes thermiques
Rapport interne du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
PARIS.

CHAPITRE III

THÉORIE DU FLUAGE LINÉAIRE DU BÉTON

SOMMAIRE

III.1.	INTRODUCTION	46
III.2.	DEFINITIONS	46
III.3.	LINEARITE ET PRINCIPE DE SUPERPOSITION DANS LE TEMPS	49
3.1.	Contraintes imposées	49
3.2.	Déformations imposées	50
3.3.	Principe de la superposition pour les charges introduites à différents moments	50
III.4.	INFLUENCE DE L'AGE DU BETON AU MOMENT DE SA MISE EN CHARGE	53
III.5.	DEFORMATION ELASTIQUE OU REVERSIBLE INSTANTANEE, DEFORMATION REVERSIBLE DIFFEREE ET DEFORMATION IRREVERSIBLE (flow)	55
III.6.	RHEOLOGIE DU BETON	57
6.1.	Fluage linéaire du béton	57
6.2.	Relation entre les fonctions f et r	62
6.3.	Considération sur le choix des fonctions primaires	65
	a) Fonction de fluage considérée comme fonction primaire,	
	b) Fonction de relaxation considérée comme fonction primaire.	
III.7.	APPLICATION AUX SYSTEMES HYPERSTATIQUES	79
7.1.	Contraintes imposées	79
7.2.	Déformations imposées	80
7.3.	Influence du mode de construction	81
7.4.	Déformations différées	83

NOTATIONS

- $B_f ; B_r$: Coefficients de composition du béton pour le fluage et le retrait respectivement.
- $e ; c$: Teneurs en eau et en ciment respectivement
- $\alpha_f ; \alpha_r$: Coefficients du rayon de la pièce pour le fluage et le retrait respectivement.
- $\psi_f ; \phi_c$: Coefficients de l'influence des conditions climatiques.
- $K_1 (t_o)$: Représente le degré de vieillissement du béton à l'âge t_o de l'application de la sollicitation.
- $K_2 (t-t_o)$: traduit l'effet de la durée de la charge supportée par le béton
- ν : Coefficient de Poisson
- $\sigma_b ; \epsilon_c$: Contraintes et déformations du béton respectivement
- $f (t, t_o)$: fonction de fluage totale (y compris la déformation reversible instantanée)
- $F (t, t_o)$: fonction de déformation différée de fluage
- K : Module de Young au temps $\longrightarrow \infty$
- $r (t, t_o)$: fonction de relaxation totale (y compris la partie due à la contrainte initiale)
- $G(t, t_o)$: fonction de relaxation différée
- $\varphi(t)$: fonction de la diminution de la contrainte

- θ, δ : Coefficients dépendant de la courbe de fluage
 a_k, b_k : Coefficients d'influence
 $v_k(t)$: Déplacements
 R_j : Réactions hyperstatiques totales
 X_i : Forces appliquées
 $s_j(t)$: Fonction de la diminution de la réaction compensatrice
 R_j^* : Réactions hyperstatiques d'un pont construit en une seule phase
 P_j : Réactions hyperstatiques dues à la précontrainte
 R_j^d : Réactions hyperstatiques dues aux dénivellations d'appui
 R_j^M : Réactions hyperstatiques dues au mode de construction
 $V_M^P / E(t, t_0)$: Déplacement vertical dû à la précontrainte au point M d'un système hyperstatique
 $\delta_M(t)$: Déplacement différé au temps $t > t_0$ d'un point M d'un système hyperstatique.

III – THÉORIE DU FLUAGE LINÉAIRE DU BÉTON

III.1. INTRODUCTION

Le béton se déforme dans le temps sous charge constante, ce phénomène s'appelle le fluage. La déformation due au fluage est la somme d'une déformation proportionnelle à la déformation élastique appelée fluage linéaire et d'une déformation complémentaire appelée fluage non linéaire. D'après les résultats obtenus dans divers laboratoires, le fluage linéaire représente pratiquement la totalité du fluage si les contraintes de compression du béton ne sont pas trop élevées. Nous allons développer la théorie du fluage linéaire dans ce chapitre. L'influence des câbles ou l'interdépendance entre le béton et l'acier sera discutée dans le chapitre suivant. L'application de cette théorie dans les ponts construits en encorbellement dont le schéma statique de construction est variable dans le temps nous permet de connaître l'évolution dans le temps des valeurs des réactions hyperstatiques produites par des câbles de précontrainte de continuité, le poids propre et les dénivellations d'appui, et permet aussi de confirmer que les réactions hyperstatiques d'un pont construit sur cintre ne varient pas en fonction du temps. Deux exemples de calcul seront donnés au chapitre VI.

III.2. DEFINITIONS

a) Fluage

Si on applique à une éprouvette de béton des contraintes constantes dans le temps, on constate des déformations de l'éprouvette variables dans le temps. Ces déformations dites déformations différées augmentent avec le temps, rapidement d'abord, puis de plus en plus lentement, pour tendre vers une valeur limite, ce phénomène est dit "fluage".

b) Relaxation

Si on applique à une éprouvette des déformations constantes dans le temps, on constate dans l'éprouvette des contraintes variables dans le temps. Ces contraintes dites contraintes différées continuent à décroître avec le temps, rapidement d'abord, puis de plus en plus lentement, pour tendre vers une valeur limite, ce phénomène est dit "Relaxation".

c) Retrait

En absence de charges extérieures, le béton peut changer d'état de déformation, s'il existe un transfert d'eau entre l'air ambiant et le béton. Ce phénomène est dit "retrait". Alors le fluage est défini comme la déformation supplémentaire d'une éprouvette sous une charge extérieure, qui est placée dans les mêmes conditions hygrométriques qu'une éprouvette sans charge.

Par conséquent le comportement du béton est caractérisé par une relation très complexe entre la contrainte, la déformation et le temps. Cette relation est essentiellement influencée par les facteurs suivants :

1) β_f ou β_r : (f = fluage ; r = retrait)

β_f ou β_r sont des coefficients liés à la composition du béton. Les valeurs de ces coefficients sont fonctions des teneurs en eau e , et en ciment c , du mètre cube de béton mis en oeuvre,

2) α_f et α_r : (α_f pour le fluage et α_r pour le retrait).

Ce sont des coefficients de la plus petite dimension de la pièce ou du rayon de la pièce, quotient de son aire par la partie de son périmètre en contact avec l'atmosphère.

3) ψ_f et ϕ_c (ψ_f pour le retrait et ϕ_c pour le fluage)

Ce sont des coefficients de l'influence des conditions climatiques.

4) $K_1(t_0)$ (pour le fluage seulement)

C'est le coefficient de l'influence de l'âge du béton au moment de sa mise en charge. La valeur de ce coefficient K_1 pour un béton de C.P.A. (ciment portland artificiel) à la température ambiante moyenne de 20°C, et dans les conditions normales de durcissement, sera prise sur la figure suivante :

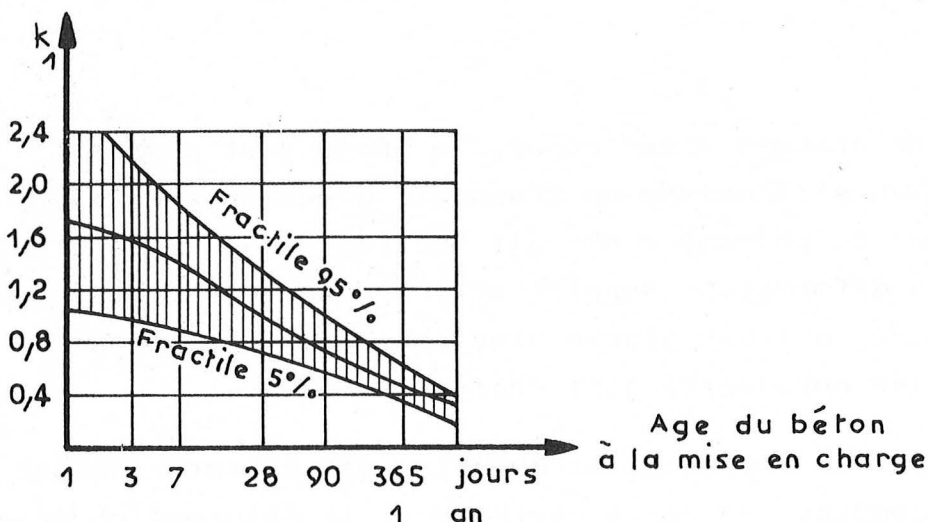


FIG. III-1

Dans le cas de températures différentes de 20° C, on attribuera au béton un âge de mise en charge corrigé donné par la formule suivante :

$$\tau = \frac{\sum \Delta\tau (0 + 10^\circ)}{30} \quad \text{III-1}$$

dans laquelle :

τ représente l'âge corrigé de mise en charge exprimé en jours ;
 $\Delta\tau$ représente le nombre de jours pendant lesquels le durcissement se fait à la température 0 du béton.

5) $k_2(t - t_0)$ (pour le fluage et retrait)

Le fluage et le retrait varient en fonction du temps. En cas de conditions climatiques constantes, le coefficient k_2 exprime l'allure de cette variation, il est égal au rapport du retrait à l'instant t_n au retrait final à l'infini.

Nous discuterons en détail dans les paragraphes suivants dans quelles conditions l'on peut utiliser ces diagrammes.

III.3. LINEARITE ET PRINCIPE DE SUPERPOSITION DANS LE TEMPS

La théorie classique de l'élasticité linéaire, dans l'hypothèse de petites déformations, se traduit par une relation linéaire entre la contrainte et la déformation ou bien encore par le rétablissement de la déformation initiale après suppression des charges extérieures. Pour le fluage du béton nous allons introduire le facteur temps. Deux méthodes peuvent être utilisées pour étudier une éprouvette dans le temps sous un état de contrainte uniaxiale.

III.3.1. Contraintes imposées

La création d'un état de contrainte est réalisée soit par une force extérieure constante dans le temps, soit par un câble de précontrainte. Si c'est le deuxième cas, le phénomène deviendra très compliqué parce que le câble non seulement se relaxe lui-même en fonction du temps mais aussi provoque un phénomène d'interaction avec le béton, nous discuterons ce dernier phénomène dans le chapitre IV.

a) Contrainte de compression imposée

La linéarité entre la contrainte et la déformation différée est fonction du rapport de la contrainte appliquée et de la résistance du béton. Si ce rapport est entre 50 ~ 75 % pour la compression, d'après GVODVEZ et BERG, l'hypothèse de la linéarité alors représente assez bien la réalité.

b) Contrainte de traction imposée

Nous n'avons pas beaucoup de renseignements sur ce point, ceci pour les deux raisons suivantes.

- 1 - La difficulté de mise au point d'essais
- 2 - Les règlements de calcul des ouvrages d'art en béton précontraint (classe I) excluent la possibilité d'existence de contraintes de traction dans toutes les sections et pour tous les cas de charge durant la vie de ces ouvrages.

c) Contraintes multiaxiales imposées

Nous pouvons étendre la notion de linéarité dans le cas de contraintes multiaxiales, pourvu que les hypothèses suivantes soient vérifiées.

Le coefficient de fluage pour le cas de contraintes en compression est le même qu'en traction.

Le coefficient de Poisson ν , pour la déformation de fluage garde la même valeur dans le domaine élastique pour le cas de contrainte uniaxiale que pour le cas des contraintes multiaxiales, malgré cela le coefficient de Poisson de celles-ci est fonction des contraintes principales et varie entre 0,03 et 0,17, valeur plus petites que celles de la contrainte uniaxiale.

III.3.2. Déformations imposées

Nous ne discuterons pas le cas des déformations imposées parce que les essais sont difficilement réalisables d'autant plus que le cas des déformations imposées est le dual de celui de contraintes imposées.

III.3.3. Principe de la superposition pour les charges introduites à différents moments

L'extension du principe de la superposition à des réponses de contraintes ou déformations dues aux déformations ou contraintes introduites à différents moments dans le béton fut fait par M. MASLOW en 1941 et M. MC HENRY en 1943. Toutefois le principe de superposition en fonction du temps a été formulé par BOLTZMAN en 1876.

Considérons 3 éprouvettes d'une même série A, B, C en compression soumises aux chargements définis par le tableau ci-après.

Eprouvettes	A	B	C
Moment d'application de charge	t_1	t_2	t_1 à t_2 : après t_2
Contraintes de compression	$(\sigma'_b)_A$	$(\sigma'_b)_B$	$(\sigma'_b)_C = (\sigma'_b)_A + (\sigma'_b)_B$
Déformation de fluage	$\varepsilon_A(t, t_1)$	$\varepsilon_B(t, t_2)$	$\varepsilon_C(t_1, t_2) = \varepsilon_A(t_1, t_2)$ $\varepsilon_C(t, t_1, t_2) = \varepsilon_A(t, t_1) + \varepsilon_B(t, t_2)$

nous pouvons expliquer ce principe par les dessins suivants :

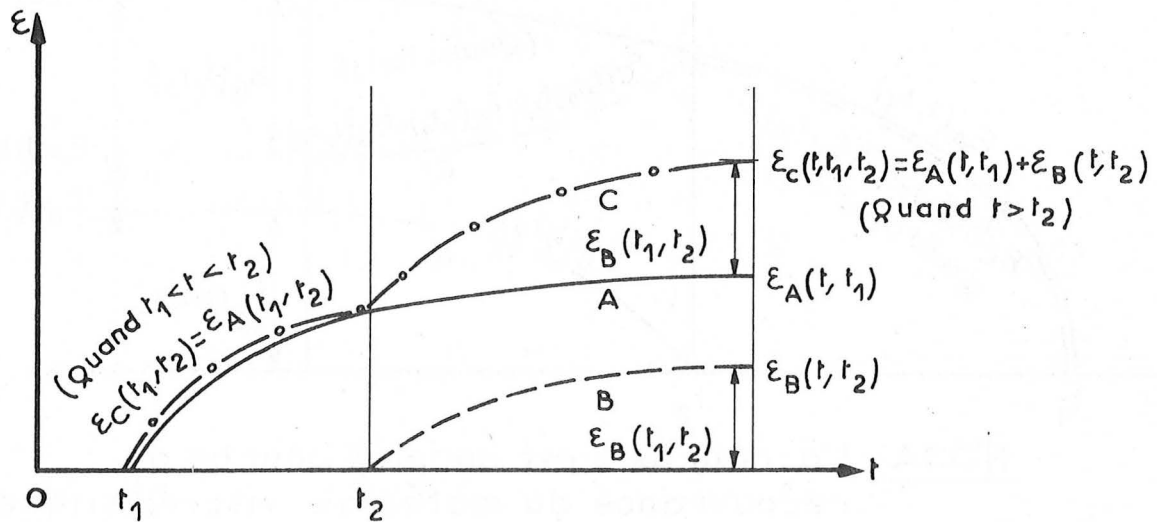


Fig. III-2

le principe de superposition se traduit par la formule suivante :

$$\varepsilon_C(t, t_1, t_2) = \varepsilon_A(t, t_1) + \varepsilon_B(t, t_2)$$

III-2

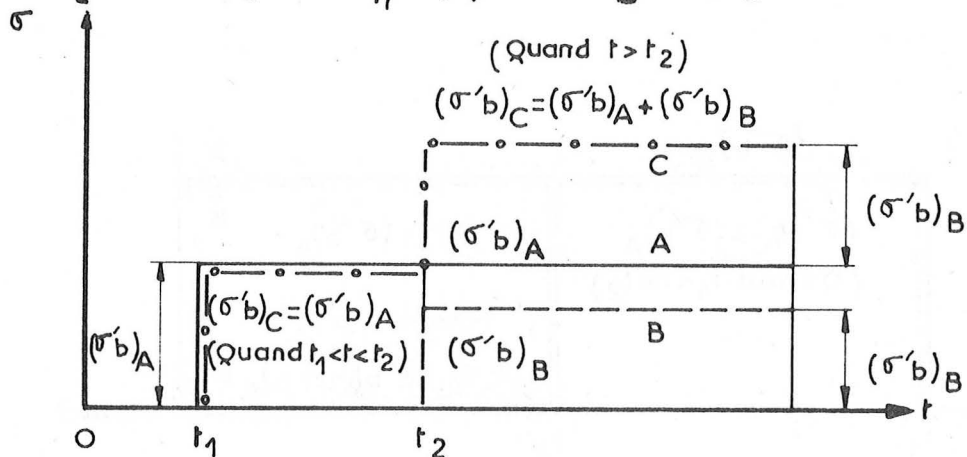
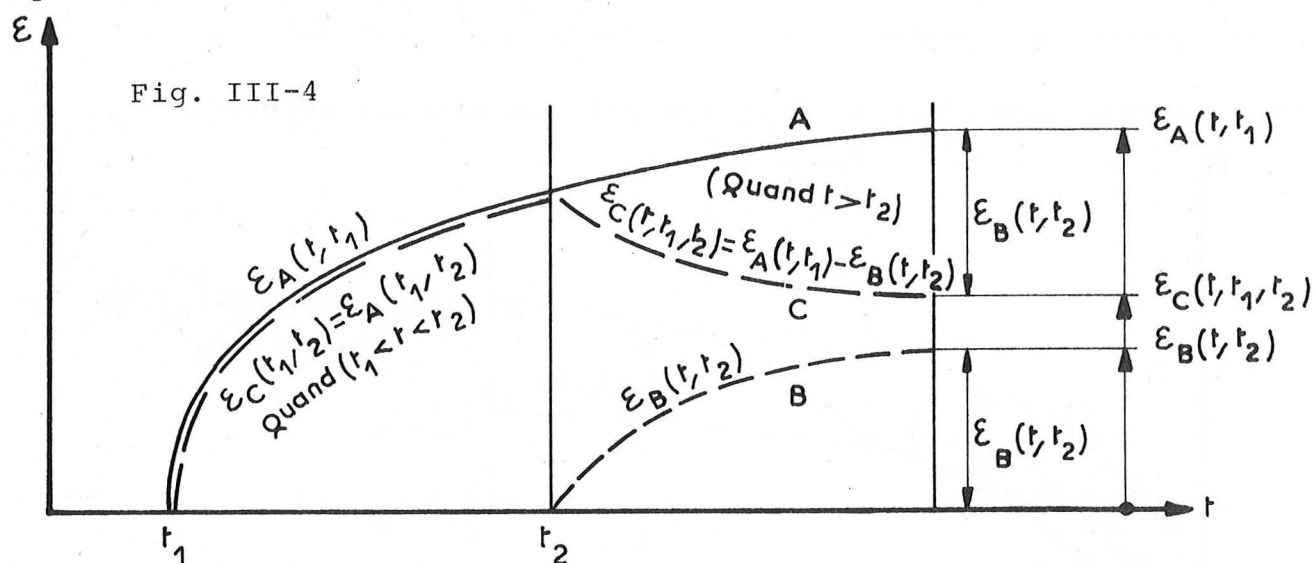


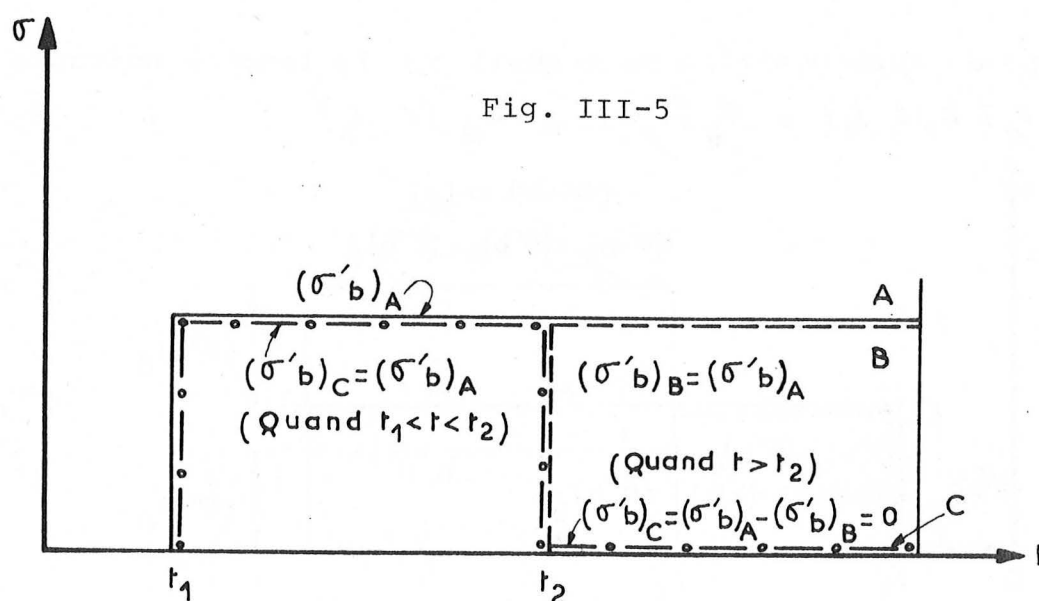
Fig. III-3

Nous précisons que la formule III-2 est valable sous les deux conditions suivantes :

- 1) Le rapport de la contrainte de compression appliquée par rapport à la résistance du béton est entre 50 et 75 %.
- 2) La contrainte de compression augmente ou décroît très légèrement. Pour ce dernier cas, si la décroissance est forte, le résultat donné par la formule III-2 est surestimé. Nous pouvons illustrer ce phénomène par les diagrammes suivants en considérant trois éprouvettes d'une même série A, B et C.



NOTA : La courbe C est appelée courbe de recouvrement du matériau viscoélastique.



! Eprouvettes	: A	: B	: C	!
! Le moment d'appli-	: t_1	: t_2	: t_1 à t_2	!
! cation de charge	: :	: :	: après t_2	!
! Contraintes de	: $(\sigma'_b)_A$	: $(\sigma'_b)_B =$	: $(\sigma'_b)_C = (\sigma'_b)_A$	!
! compression	: :	: $(\sigma'_b)_A$	: $(\sigma'_b)_B = 0$	!
! Déformation de	: $\epsilon_A(t_1, t_1)$	: $\epsilon_B(t_1, t_2)$	: $\epsilon_C(t_1, t_2) =$	!
! fluage	: :	: :	: $\epsilon_A(t_1, t_2)$	!
!	:	:	: $\epsilon_C(t, t_1, t_2) =$	!
!	:	:	: $\epsilon_A(t, t_1) - \epsilon_B(t, t_2)$	!

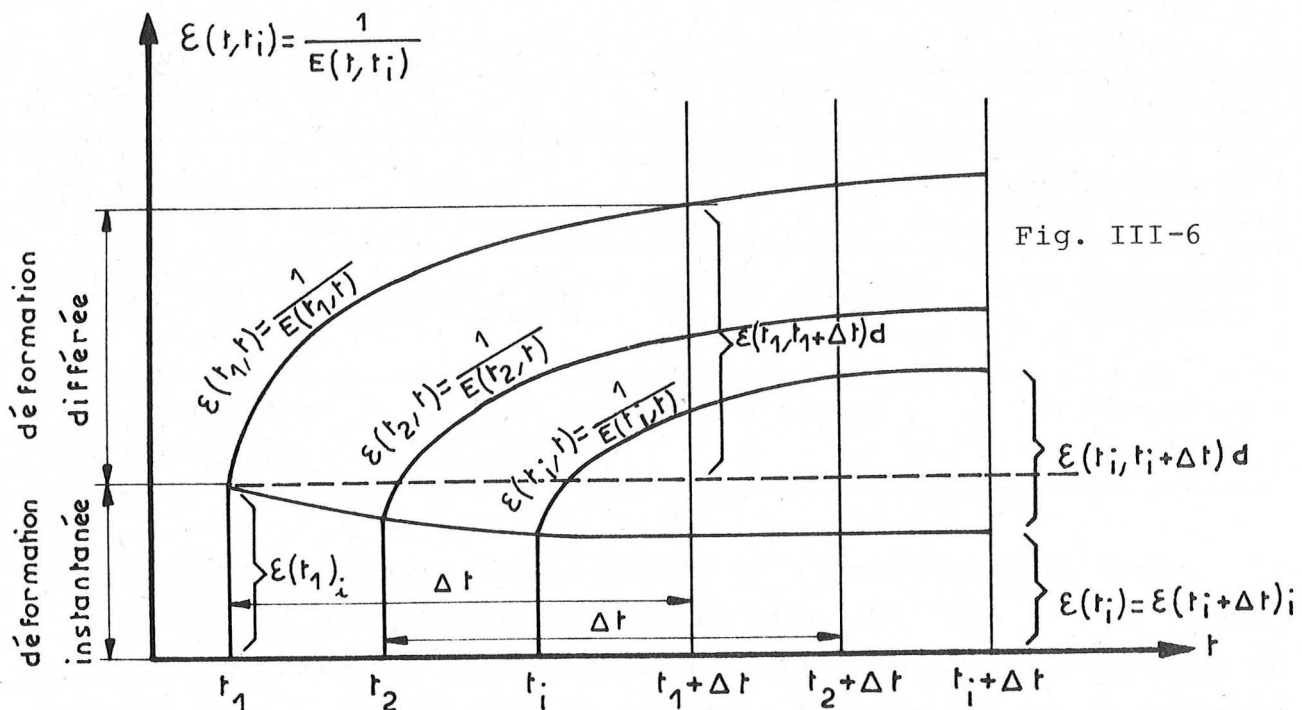
III-3

Pour l'éprouvette C, la courbe réelle mesurée $\epsilon_C(t, t_1, t_2)$ entre t_2 et t est plus faible. Par conséquent le principe de superposition traduit par l'équation III-3 entraîne une surestimation de la déformation négative de fluage $\epsilon_C(t, t_1, t_2)$. Malgré un certain désaccord à propos de ce principe de la part de certains auteurs notamment MM. BAZANT, VASILEV etc.... nous l'accepterons aussi bien pour le cas dit "contraintes imposées" que pour le cas dit "déformations imposées", nous pensons même qu'il est utile d'aller plus loin en considérant que ce principe de superposition est valable aussi pour le cas dit "contraintes imposées par pas" proposé par M. COURBON, dans le but de l'appliquer aux ouvrages d'art construits en encorbellement.

Conclusion : l'acceptation du principe de la linéarité et de la superposition en fonction du temps nous permet d'appliquer le théorème de viscoélasticité développé initialement par BOLTZMAN et VOLTERRA, et d'interpréter le comportement rhéologique du béton.

III.4. INFLUENCE DE L'AGE DU BETON AU MOMENT DE SA MISE EN CHARGE

Considérons une même série d'éprouvettes soumises à une charge constante aux différents temps t_i . Les résultats des essais conduisent au diagramme suivant :



D'après ce diagramme nous constatons qu'il existe 2 phénomènes :

a) L'influence de l'âge d'application de la charge pour la déformation se traduit par une diminution de la déformation instantanée $\epsilon(t)_i$. Quand le temps augmente, cette courbe tend très vite (en un ou deux mois) vers une limite.

b) L'influence de l'âge d'application de la charge pour la déformation différée se traduit par une diminution de la déformation différée $\epsilon(t_n, t_n + \Delta t)$ quand l'âge d'application de la charge t_n augmente. La valeur de la diminution de déformation différée est beaucoup plus importante que celle de la déformation instantanée pour le même Δt :

$$\epsilon(t_i, t_i + \Delta t)d - \epsilon(t_n, t_n + \Delta t)d \gg \epsilon(t_i)_i - \epsilon(t_n) :$$

$$t_i < t_n < t_i$$

A l'inverse de la déformation instantanée, la déformation différée mesurée tend lentement vers une limite, même lorsque le moment d'application de la charge t_n est supérieur à 10 ans.

Pour un très vieux béton, t_n n'a plus d'influence sur la déformation différée ϵd ; alors le principe de superposition se traduit par le diagramme suivant :

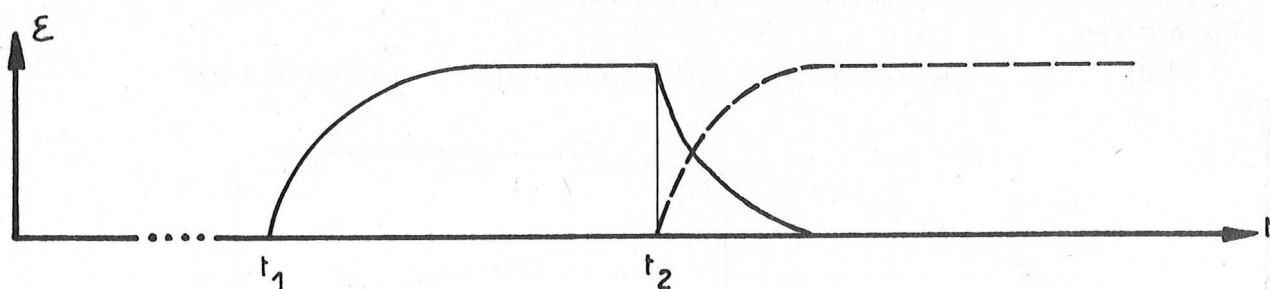


Fig. III-7

Pour des ouvrages d'art construits en encorbellement, c'est souvent un béton jeune (3 jours) qui est soumis à une charge extérieure, nous examinerons cette question en détail dans la suite.

III.5. DEFORMATION ELASTIQUE OU REVERSIBLE INSTANTANEE ; DEFORMATION REVERSIBLE DIFFEREE ET DEFORMATION IRRÉVERSIBLE (FLOW)

En vertu des figures III-8 et III-9, nous constatons que, après suppression de la charge d'une éprouvette, la déformation subit une première diminution immédiate. Cette diminution est dite "déformation élastique ou reversible instantanée". Ensuite la déformation diminue lentement en fonction du temps, cette déformation est dite "déformation de fluage reversible différé". Enfin il subsiste une déformation irréversible, dite "déformation de fluage irréversible (flow)". Nous allons étudier un peu plus en détail la déformation réversible différée et la déformation irréversible. Nous nommons la déformation totale de fluage la somme de la déformation reversible différée et de la déformation irréversible.

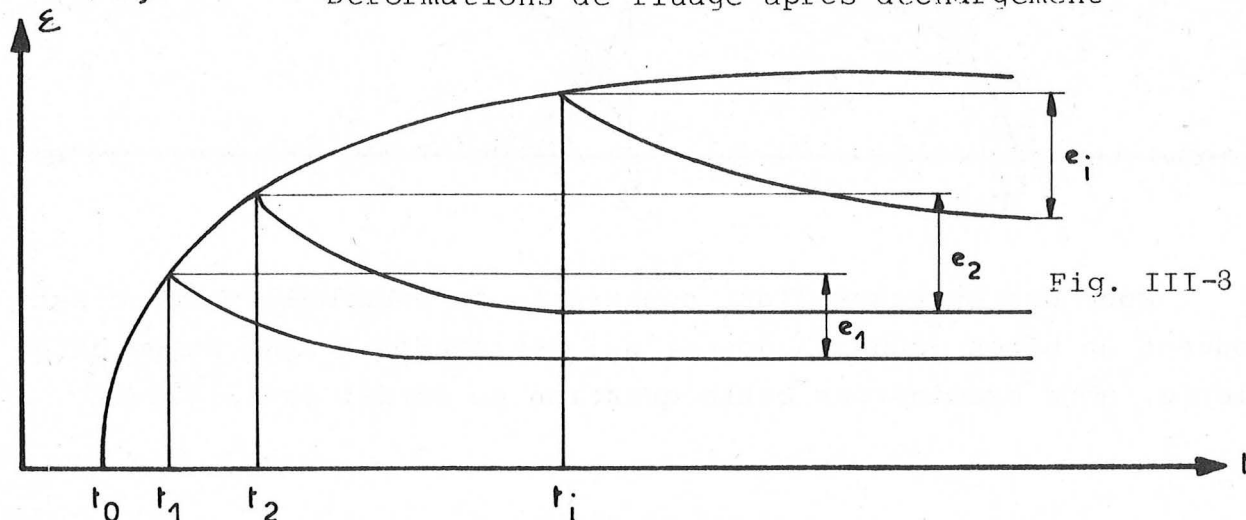
Soit une série d'éprouvettes $E_1, E_2, \dots, E_i$ coulées toutes en même temps et dans les mêmes conditions, subissant la même contrainte constante dans le temps. Nous supprimons la contrainte à des instants différents $t_1, t_2, \dots, t_i$, ce qui nous permet d'obtenir $e_1, e_2, \dots, e_i$ aux abscisses $t_1, t_2, \dots, t_i$ correspondantes ; alors nous pouvons tracer la courbe de la déformation reversible différée (figure III-9). Par différence entre la courbe de fluage total et la courbe des déformations reversibles différées nous obtenons

la courbe de la déformation irréversible.

déformation

fluage

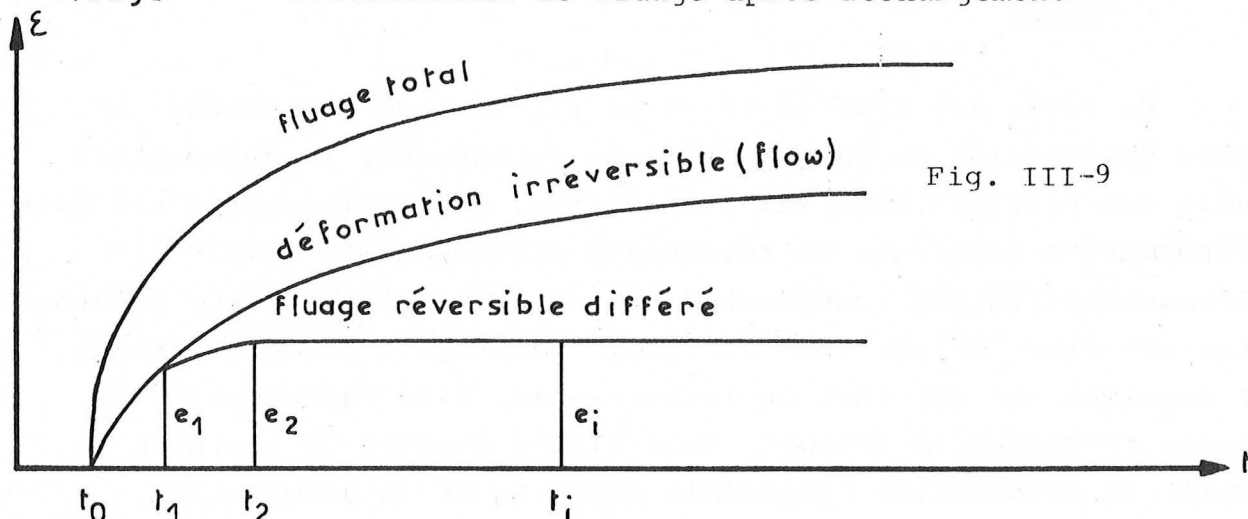
Déformations de fluage après déchargement



déformation

fluage

Déformations de fluage après déchargement



Nous pouvons refaire la même expérience en chargeant deux séries d'éprouvettes à des âges différents. (figure III-10).

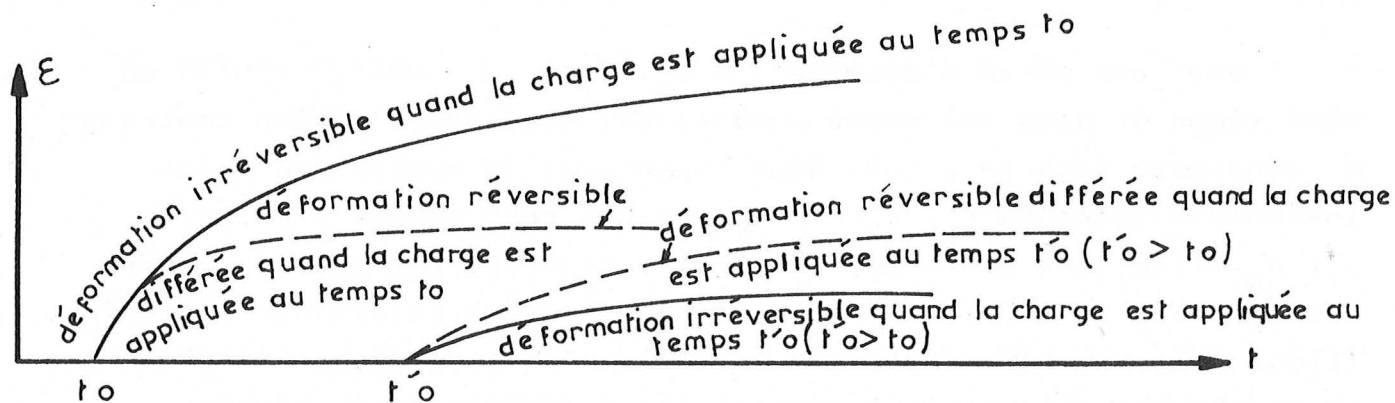


Fig. III-10

En comparant les courbes des figures III-8 et III-9 et les 2 séries de deux courbes (figure III-10), nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1) La déformation réversible différée se développe plus rapidement que la déformation irréversible. L'asymptote est atteinte par la courbe de la déformation réversible différée en quelques semaines, par contre le "flow" exige quelques années (figure III-9).

2) La déformation irréversible diminue quand t'_0 augmente. Pour un béton vieux, elle tend vers zéro. (figures III-5 et III-10).

3) En revanche, l'âge du béton au moment du chargement n'influence pas la déformation finale réversible différée, les 2 courbes (figure III-10) tendent vers la même asymptote.

III.6. RHEOLOGIE DU BETON

II.6.1. Fluage linéaire du béton

Considérons une éprouvette de béton à laquelle nous appliquons à partir de l'âge t_0 , une contrainte de compression constante ($\sigma(t) = \text{constante}$) ; la contrainte du béton est donc définie par :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < t_0 \\ \sigma & \text{pour } t \geq t_0 \end{cases}$$

l'hypothèse de la linéarité nous permet d'écrire les formules suivantes :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) f(t, t_0) \quad \text{III-4}$$

Etant donné que $\sigma(t) = \text{constante}$, nous pouvons écrire :

$$\sigma(t) = \sigma = \sigma(t_0) = \sigma_0 \quad (\text{quand } t \geq t_0) \quad \text{III-5}$$

Introduisons III-5 dans III-4 nous trouvons :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 f(t, t_0) \quad \text{III-6}$$

Dans la formule III-4 ou III-6, $f(t, t_0)$ est la fonction de fluage représentant la variation de déformation dans le temps due à une unité de contrainte σ_0 constante, elle inclut la déformation réversible instantanée. $f(t, t_0)$ peut s'écrire comme suit :

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0, t)} \quad \text{III-7}$$

alors

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E(t_0, t)} \quad \text{III-8}$$

Le module de déformation du béton est donc une fonction des deux variables t_0 et t . Pour simplifier l'écriture nous poserons :

$$E(t_0, t_0) = E(t_0) ; E(t_0, \infty) = K(t_0)$$

La relation III-8 peut s'écrire :

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t_0)} + \sigma F(t_0, t) \quad \text{III-9}$$

avec

$$F(t_0, t) = \frac{1}{E(t_0, t)} - \frac{1}{E(t_0, t_0)} \quad \text{III-10}$$

Nous définirons le fluage linéaire du béton par la déformation résultant de la somme de la déformation réversible instantanée $\frac{\sigma}{E(t_0, t_0)}$ et d'une déformation totale différée ou déformation totale de fluage (une partie étant réversible et une partie irréversible) $\sigma F(t_0, t)$, proportionnelle à la contrainte et croissante avec le temps.

Nous pouvons aussi écrire la fonction duale du III-6

$$\sigma(t) = \epsilon_0 \Omega(t, t_0) \quad \text{III-6'}$$

$\Omega(t, t_0)$ est la fonction de relaxation représentant la variation de contrainte dans le temps due à une unité de déformation ϵ_0 constante, elle inclut la contrainte initiale.

Si la contrainte imposée est variable dans le temps, l'accroissement de contrainte $d\sigma = \sigma'(\tau) d\tau$ entre les instants τ et $\tau + d\tau$ provoque un raccourcissement unitaire $\frac{d\sigma}{E(\tau, t)} = f(\tau, t) d\sigma$ au temps t , il en résulte qu'au temps t , le raccourcissement unitaire total du béton, d'après le principe de superposition, aura pour expression :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) f(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} f(t, \tau) d\tau \quad \text{III-11}$$

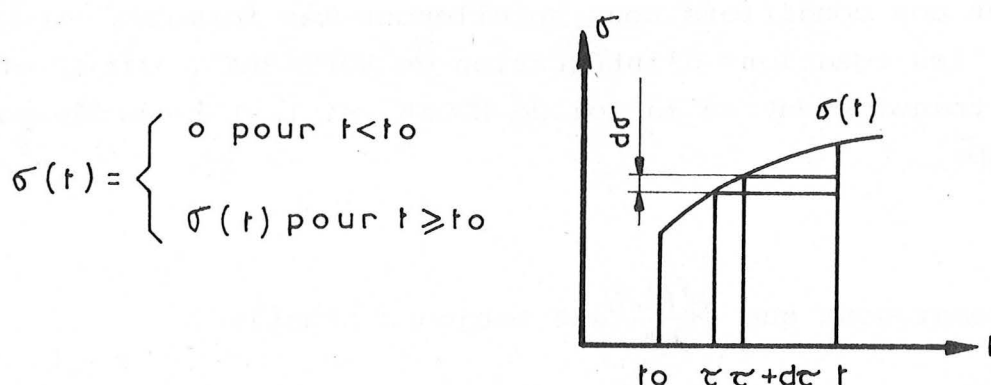


Fig. III-11

La formule duale s'écrit (sous l'action de la déformation variable imposée dans le temps)

$$\sigma(t) = \varepsilon(t_0) r(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} r(t, \tau) d\tau \quad \text{III-11'}$$

une intégration par parties permet d'écrire les relations III-11 et III-11' sous la forme :

$$\varepsilon(t, t_0) = \sigma(t) f(t, t) - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) \cdot \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial \tau} \cdot d\tau \quad \text{III-12}$$

$$\sigma(t, t_0) = \varepsilon(t) r(t, t) - \int_{t_0}^t \varepsilon(\tau) \cdot \frac{\partial r(t, \tau)}{\partial \tau} \cdot d\tau \quad \text{III-12'}$$

$$\left(\int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} f(t, \tau) d\tau = f(t, \tau) \sigma(\tau) \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \sigma(\tau) df(t, \tau) \right)$$

Les formules III-11 et III-11' ou III-12 et III-12' peuvent être considérées simplement comme une sommation grâce au principe de la superposition généralisée. Dans la formule III-12 la fonction $f(t, \tau)$ est connue (obtenue, par exemple, par des essais en laboratoire). Si c'est la déformation qui est imposée alors l'inconnue sera σ au lieu de ϵ .

La formule III-12 est donc une équation intégrale, l'inconnue σ figurant sous le signe somme. (Même raisonnement pour la formule III-12'). Dans ces conditions nous appellerons les formules III-12 et III-12' "les équations d'intégration de VOLTERRA". III-11 et III-11', se transforment en la loi de HOOKE, si f et r ne dépendent plus du temps.

Nota :

1) Remarquons que $\frac{\partial f(t, \tau)}{\partial \tau}$ est toujours négative.

2) Etant donné que la signification physique est la même pour les fonctions $\sigma(t, t_0)$ et $\sigma(t)$ ou $\epsilon(t, t_0)$ et $\epsilon(t)$, nous pouvons écrire :

$$\sigma(t, t_0) = \sigma(t)$$

$$\epsilon(t, t_0) = \epsilon(t)$$

3) Une méthode du calcul numérique de la formule III-11 a été proposée par M. BAZANT.

Soit

$$\epsilon(t) - \sigma(t_0) f(t, t_0) = \int_{t_0}^t f(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad \text{III-11}$$

Si la déformation $\epsilon(t)$ est donnée, l'équation III-11 deviendra une équation intégrale de VOLTERRA en $\sigma(t)$. Nous proposerons de discrétiser le temps t suivant $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ avec un intervalle de temps $\Delta t_r = t_r - t_{r-1}$ ($r = 1, 2, \dots, N$)

Posons

$$\epsilon(t_r) = \epsilon_r$$

$$\sigma(t_0) f(t_r, t_0) = \epsilon_r^0$$

En appliquant la méthode des trapèzes à la formule III-11 nous obtiendrons

$$\epsilon_r - \epsilon_r^0 = \sum_{s=1}^r \frac{1}{2} (f_{r,s} - f_{r,s-1}) \Delta \sigma_r \quad (A)$$

où

$$\Delta \sigma_r = \sigma_r - \sigma_{r-1} ; f_{r,s} = f(t_r, t_s)$$

Réécrivons l'équation (A) pour ϵ_{r-1}

$$\epsilon_{r-1} - \epsilon_{r-1}^0 = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2} (f_{r-1,s} + f_{r-1,s-1}) \Delta \sigma_s \quad (B)$$

pour $r > 1$

l'équation (A) moins l'équation (B)

$$\begin{aligned} (\epsilon_r - \epsilon_{r-1}) - (\epsilon_r^0 - \epsilon_{r-1}^0) &= \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2} (f_{r,s} + f_{r,s-1}) \Delta \sigma_s + \frac{1}{2} (f_{r,r} + f_{r,r-1}) \Delta \sigma_r \\ &\quad - \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2} (f_{r-1,s} + f_{r-1,s-1}) \Delta \sigma_s \end{aligned}$$

$$\Delta \epsilon_r - \Delta \epsilon_r^0 - \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2} \Delta \sigma (f_{r,s} + f_{r,s-1} - f_{r-1,s} - f_{r-1,s-1}) = \frac{1}{2} (f_{r,r} - f_{r,r-1}) \Delta \sigma_r$$

d'où

(C)

$$\Delta \sigma_r = E_r'' (\Delta \epsilon_r - \Delta \epsilon_r'')$$

où

$$E_r'' = \frac{2}{(f_{r,r} + f_{r,r-1})}$$

$$\Delta \epsilon_r'' = \sum_{s=1}^{r-1} \Delta \sigma_s \frac{1}{2} (f_{r,s} + f_{r,s-1} - f_{r-1,s} - f_{r-1,s-1}) + \Delta \epsilon_r^0$$

l'équation (C) est dite "Loi de HOOKE fictive" et le pas est choisi tel que $f(t_r, t_0) - f(t_{r-1}, t_0) = 0,02 f(t_r, t_0)$ dans le but de faciliter de la convergence.

La fonction de fluage recommandée par A.C.I. (American concrete institute) est la suivante :

$$f(t, t') = [1 + \varphi(t, t')] / E(t')$$

où $E(t') = E(28) [t' / (4 + 0,85 t')]^{\frac{1}{2}}$

$$\varphi(t, t') = \varphi_{\infty}(t') f_1(t - t')$$

$$\varphi_{\infty}(t') = \varphi(\infty, 7) 1,25 t'^{-0,118}$$

$$f_1(t - t') = (t - t')^{0,6} / [10 + (t - t')^{0,6}]$$

et t est en jours.

Si la fonction de fluage est donnée numériquement, nous pourrons toujours faire un sous-programme, ceci ne crée aucune difficulté au point de vue de la programmation. La méthode du calcul numérique de la formule (3-11') est analogue de celle de la formule (3-11).

III.6.2. Relation entre la fonction f et r

Si on considère que l'une des deux fonctions ($f(t, t_0)$, $r(t, t_0)$) est la fonction primaire, alors nous pouvons obtenir l'autre fonction associée par un calcul purement mathématique.

Soit $\epsilon(t) = \epsilon = \text{constante} = \sigma(t_0) / E(t_0, t_0)$

$$\sigma(t) = \epsilon r(t, t_0).$$

Quand $t = t_0$,

Nous avons :

$$r(t_0, t_0) = E(t_0, t_0)$$

III-6' peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \varepsilon r(t, t_0) = \varepsilon r(t, t_0) \\ &= \varepsilon r(t_0, t_0) - \varepsilon Q(t_0, t) \\ &= \sigma(t_0) - \varepsilon Q(t_0, t)\end{aligned}\tag{III-13}$$

avec $Q(t_0, t) = r(t_0, t_0) - r(t_0, t)$ III-14

l'équation III-11, s'écrit en vertu de III-7

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0, t)} - \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{E(\tau, t)} d\tau\tag{III-15}$$

d'où

$$\frac{\sigma(t_0)}{E(t_0, t_0)} - \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0, t)} = \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau, t)} d\tau\tag{III-16}$$

nous voyons que $\sigma(t)$ est la solution de l'équation intégrale suivante en vertu de III-10.

$$-\sigma(t_0)F(t_0, t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \frac{1}{E(\tau, t)} d\tau\tag{III-17}$$

qui prend la valeur $\sigma(t_0)$ pour $t = t_0$, il en résulte que la diminution de contrainte ou relaxation $\varphi(t) = \sigma(t_0) - \sigma(t)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^t \frac{\varphi'(\tau) d\tau}{E(\tau, t)} = \sigma(t_0) F(t_0, t)\tag{III-18}$$

mathématiquement nous savons résoudre l'équation suivante :

$$\int_{t_0}^t \frac{\Phi'(\tau) d\tau}{E(\tau, t)} = F(t_0, t)\tag{III-19}$$

où $\varphi(t) = \sigma(t_0) \Phi(t_0, t)$ III-20

Nous désignons par

$$\Phi(t) = \Phi(t_0, t)$$

La solution de III-18 qui s'annule pour $t = t_0$, donc

$$\Phi(t_0, t_0) = 0$$

alors nous obtenons pour valeur de la relaxation

$$\varphi'(t) = \sigma(t_0) \Phi'(t_0, t) \quad \text{III-21}$$

d'autre part la relation $\varphi(t) = \sigma(t_0) - \sigma(t)$ permet d'écrire :

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) [1 - \Phi(t_0, t)] = \epsilon E(t_0, t) [1 - \Phi(t_0, t)]$$

Nous pouvons écrire aussi en vertu de $\sigma(t) = \epsilon r(t, t_0)$

$$r(t_0, t) = E(t_0, t) [1 - \Phi(t_0, t)]$$

$$-\Phi(t_0, \tau) = \frac{r(t_0, \tau) - E(t_0, t_0)}{E(t_0, t_0)}$$

$$-\Phi'(t_0, \tau) = - \frac{r'(t_0, \tau)}{E(t_0, t_0)} \quad \text{III-22}$$

Introduisons III-22 dans III-19 nous avons :

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{E(\theta, t)} \frac{\partial r(t_0, \theta)}{\partial \theta} d\theta = - E(t_0, t) F(t_0, t) \quad \text{III-23}$$

Ainsi nous avons obtenu la formule permettant de calculer la fonction associée, connaissant la fonction primaire.

NOTA :

- 1) Nous pouvons aussi supposer que la fonction primaire est

la fonction de relaxation et que la fonction associée (fluage) est déduite de la fonction primaire.

2) Les expériences de relaxation sont particulièrement intéressantes, parce qu'elles permettent d'éliminer l'influence du retrait et elles sont beaucoup plus rapides que celles de fluage ; par contre les essais sont extrêmement difficiles à mettre au point.

3) Solution de l'équation III-18

- Si la loi de fluage est prise comme suit

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right) [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]$$

on pourra trouver ϕ en dérivant III-19 par rapport à t

$$\phi(t) = \phi(t_0, t) = \left(1 - \frac{K}{E} \right) [1 - e^{-\beta \frac{E}{K}(t-t_0)}]$$

- Si la loi de fluage est prise comme suit

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E(t_0)} - \left[\frac{1}{K(t_0)} - \frac{1}{E(t_0)} \right] [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]$$

on pourra trouver ϕ en dérivant III-19 deux fois par rapport à t

$$\phi(t) = \phi(t_0, t) = \beta \left[\frac{1}{K(t_0)} - \frac{1}{E(t_0)} \right] \int_{t_0}^t E(u) e^{-\gamma(u)} du$$

où

$$\gamma(t) = \beta \int_{t_0}^t \frac{E(u)}{K(u)} du$$

β = caractérise la vitesse de fluage.

III.6.3. Considérations sur le choix des fonctions primaires

a) Fonction de fluage considérée comme fonction primaire

- La méthode dite "Sans déformation réversible différée"

Soient

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \sigma(t) f(t, t_0) \\ &= \frac{\sigma}{E(t_0)} + \sigma F(t_0, t)\end{aligned}$$

$$F(t_0, t) = \frac{1}{E(t_0, t)} - \frac{1}{E(t_0, t_0)}$$

alors on a :

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + F(t_0, t)$$

III-24

On suppose que

$$F(t_0, t) = F(t) - F(t_0)$$

Alors la formule (3-24) devient :

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + F(t) - F(t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{E_0}$$

III-25

Si le module élastique est constant, c'est-à-dire $E(t_0) = E_0$

On peut écrire :

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E_0} [1 + \varphi(t) - \varphi(t_0)]$$

III-26

La fonction $F(t, t_0)$ peut se représenter comme suit :

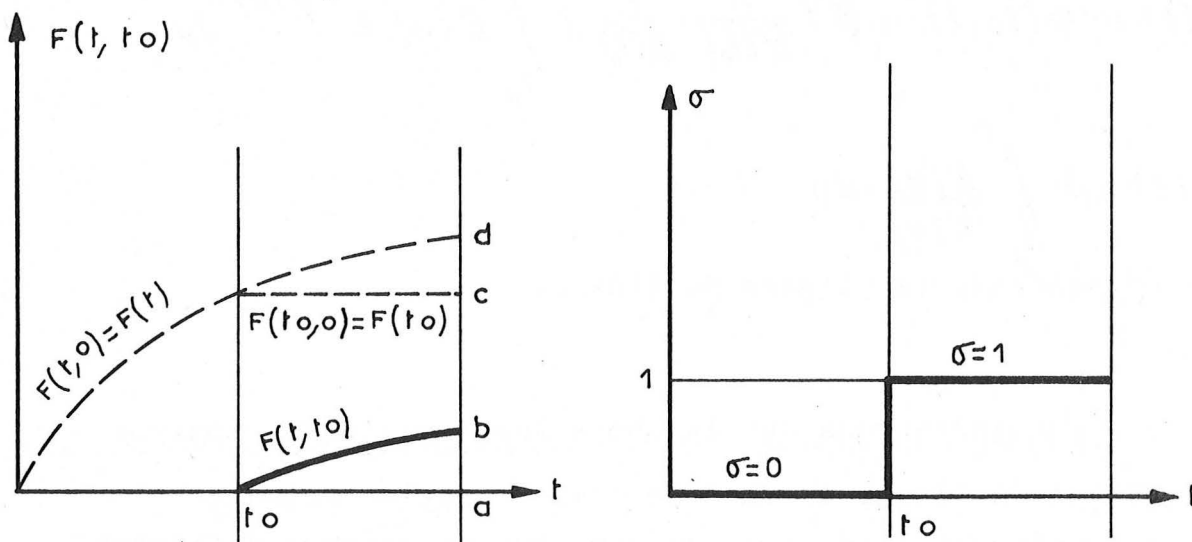


Fig. III-12

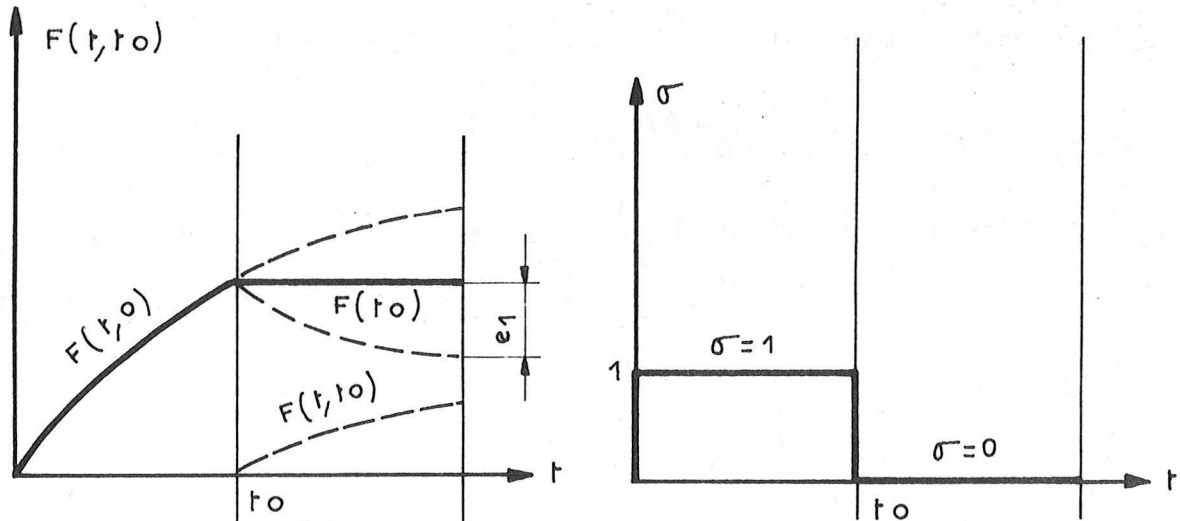


FIG. III-13

De la figure III-13, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1) Il n'y a pas de déformation réversible différée e_1 , quand on supprime la contrainte $\sigma = 1$ au temps t_0 , il n'y a que la déformation irréversible, par conséquent le système perd une quantité d'énergie beaucoup plus importante que dans la réalité.

2) Si on change la contrainte au temps t_i ($t_i > t_0$) et si $t_i \rightarrow \infty$ alors il ne produira pas de supplément de fluage dû au changement de contrainte.

Etant donné que la loi de $F(t, t_0)$ se présente sous une forme très simple, alors l'équation intégrale de VOLTERRA III-12, pour une déformation imposée, devient une simple équation différentielle dans laquelle on tire :

$$\gamma_f(t, t_0) = E(t_0) - E(t_0) \left[1 - e^{-\int_{t_0}^t E(t) \frac{dF(t) dt}{dt}} \right] \quad \text{III-27}$$

Si $E(t_0) = \text{constante} = E_0$ On a :

$$\gamma_f(t, t_0) = E_0 - E_0 \left[1 - e^{-E_0 [F(t) - F(t_0)]} \right] \quad \text{III-28}$$

Les formes les plus utilisées de $F(t)$ sont les suivantes :

a) Loi exponentielle

$$F(t) = F(\infty)[1 - e^{-\theta t}]$$

III-29

θ : coefficient dépendant de la courbe de fluage trouvée par des essais en laboratoire

b) Loi hyperbolique

$$F(t) = F(\infty) \frac{t}{t + \delta}$$

III-30

δ : même signification physique que θ

Si on adopte la loi exponentielle, on aura :

$$f(t, t_0) = \frac{1}{F(t_0)} + F(\infty)[e^{-\theta t_0} - e^{-\theta t}]$$

III-31

$$F(t, t_0) = F(\infty)[e^{-\theta t_0} - e^{-\theta t}]$$

III-32

$$= e^{-\theta t_0} F(\infty)[1 - e^{-\theta(t-t_0)}]$$

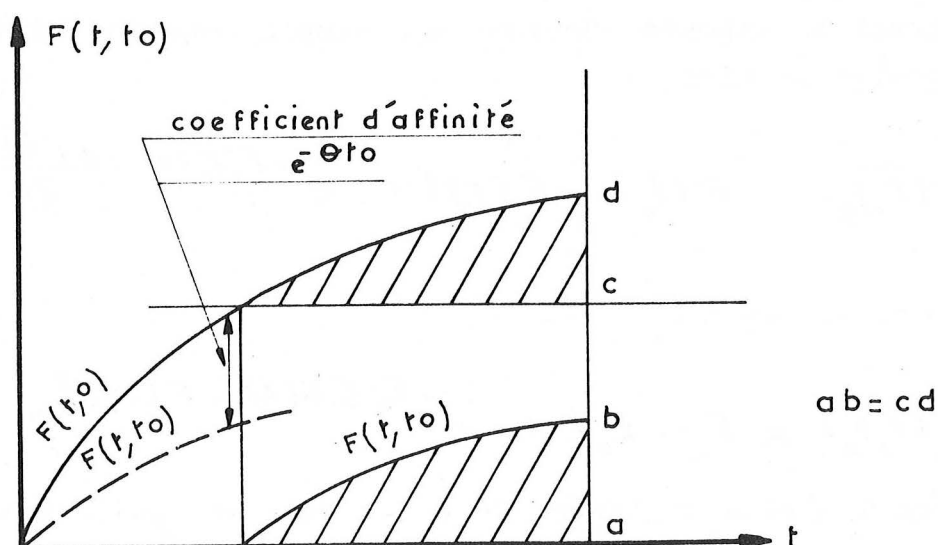


Fig. III-14

On voit bien que les différentes courbes pour les différents cas de charge t_0 se déduisent mutuellement par affinité.

- La méthode dite "avec déformation réversible différée complétée"

On suppose que $F(t, t_0) = F(t - t_0)$

III-33

La conséquence de cette hypothèse est que l'instant de charge n'a pas d'influence sur les déformations instantanées et différées.

La déformation totale est seulement fonction de la durée de charge, on peut donc l'appliquer au vieux béton. Les courbes de fluage se déduisent mutuellement par une translation.

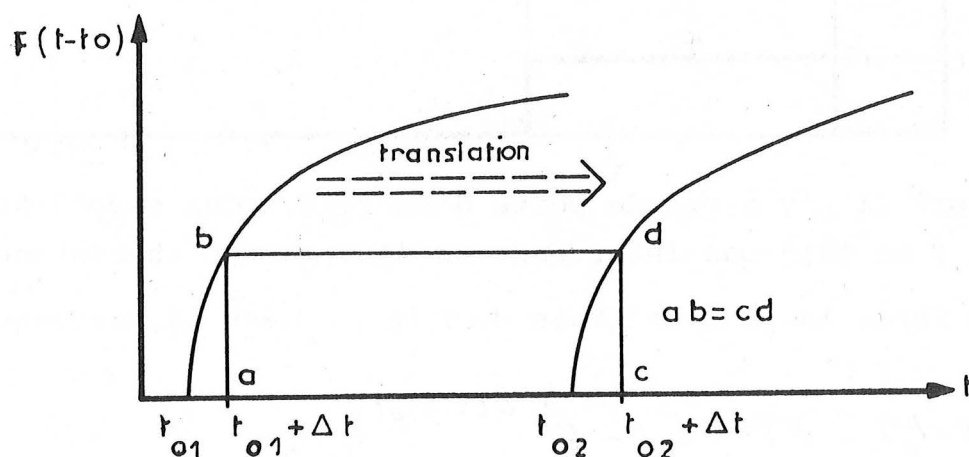


Fig. III-15

Nous pouvons aussi tirer la conclusion suivante : quand on supprime la charge extérieure, toujours d'après le principe de superposition, la déformation est entièrement réversible, par conséquent, il n'y a pas de déformation différée irréversible (flow).

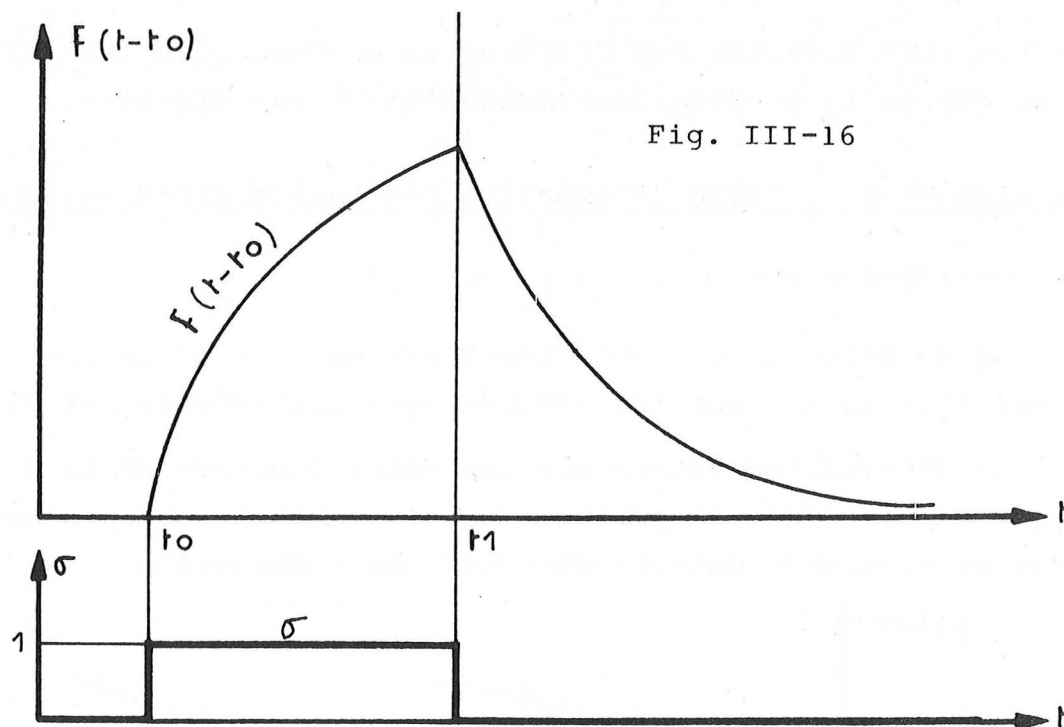


Fig. III-16

Alors il n'y a pas de perte d'énergie. Nous rappelons que la fonction F ne fait pas intervenir la déformation instantanée.

La forme la plus utilisée de $F(t - t_0)$ est la suivante :

$$F(t - t_0) = F(\infty) [1 - e^{-\theta(t - t_0)}] \quad \text{III-34}$$

d'où

$$\begin{aligned} f(t - t_0) &= \frac{1}{E_0} + [F(\infty)(1 - e^{-\theta(t - t_0)})] \\ &= \frac{1}{E_0} [1 + \varphi(\infty)(1 - e^{-\theta(t - t_0)})] \end{aligned} \quad \text{III-35}$$

où

$$\varphi(\infty) = E_0 F(\infty) \quad \text{ou} \quad \varphi(t) = E_0 F(t)$$

En comparant III-34 et III-32 nous pouvons remarquer que la différence entre les hypothèses $F(t, t_0) = F(t) - F(t_0)$ et $F(t, t_0) = F(t - t_0)$ se traduit par le facteur multiplicateur $e^{-\theta t_0}$.

- La méthode dite "mixte"

On suppose que

$$\begin{aligned} F(t, t_0) &= F(\infty, t_0) \cdot K_t(t - t_0) \\ &= F(\infty, t_0) [1 - e^{-\theta(t-t_0)}] \end{aligned} \quad \text{III-36}$$

$F(\infty, t_0)$ peut se présenter sous les deux formes suivantes :

$$F(\infty, t_0) = F + \frac{A}{t_0} \quad \text{III-37}$$

$$= F_0 - A e^{-\theta t_0} \quad \text{III-38}$$

F_0 et A : Coefficients obtenus en laboratoire

Nous pouvons en tirer immédiatement la conclusion suivante :

La fonction $F(t, t_0)$ est obtenue par une translation suivie d'une affinité ; par conséquent les courbes de fluage relatives aux instants de charge t_i peuvent se déduire mutuellement par une affinité.

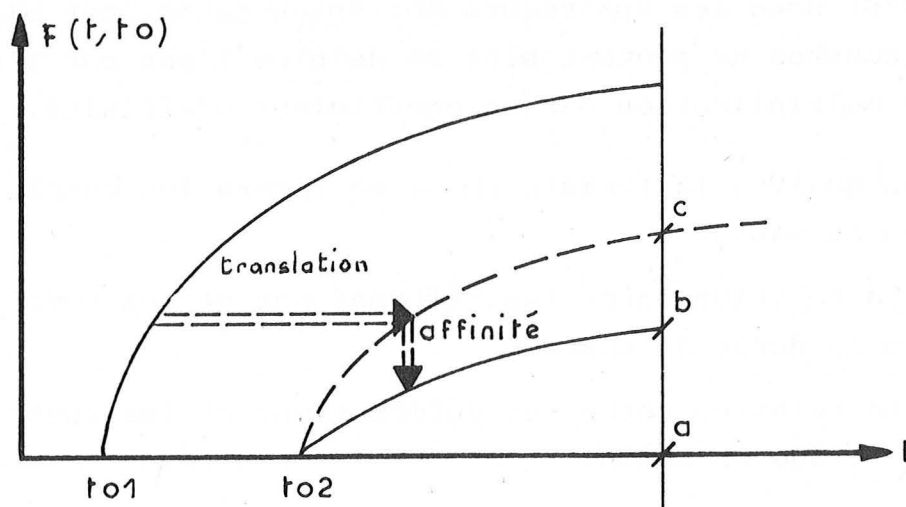


Fig. III-17

alors $\overline{ab} = F(\infty, t_{02}) \overline{ac}$.

Nous voyons que $F(\infty, t_{02})$ joue le même rôle que le terme $e^{-\theta t_0} F(\infty)$ dans l'équation 3-32. Mais ces deux équations interpré-

tent les deux modèles de manière entièrement différente.

On peut représenter le terme $k_t (t - t_0)$ de l'équation III-36 sous l'autre forme suivante.

$$\begin{aligned} F(t, t_0) &= F(\infty, t_0) K_t(t - t_0) \\ &= \frac{\rho_{\infty}(t_0)}{E_0} K_t(t - t_0) \\ &= \frac{1}{E_0} \beta_f \alpha_f \phi_c K_1(t_0) K_2(t - t_0) \end{aligned}$$

III-39

E_0 : module d'élasticité du béton.

$\beta_f, \alpha_f, \phi_c, K_1(t_0)$ et $K_2(t - t_0)$ sont définis au paragraphe 3-2

On peut trouver une série de courbes de $k_2(t - t_0)$ correspondant à certains coefficients α_f dans la recommandation du CEB-FIP (Prague 1970) donc les épaisseurs des éprouvettes sont bien définies, alors les courbes ne peuvent plus se déduire l'une par l'autre par une simple multiplication par un coefficient d'affinité.

Si on analyse la formule III-39 on tirera les conclusions principales suivantes :

1) La relation entre les déformations et les contraintes est fonction de la durée de charge.

2) La relation entre les déformations et les contraintes est fonction de l'âge du béton.

Mais si l'on continue d'analyser en détail, on trouve que l'utilisation de la formule III-39, conduit au résultat suivant : la contrainte est fonction de la partie irréversible de la déformation, sachant que cette partie de déformation irréversible est surestimée. Malgré les défauts que présente la méthode mixte, nous l'appliquerons aux ouvrages d'art. Pour la solution du problème de la contrainte imposée variable, l'équation intégrale III-11 devient la simple sommation suivante :

$$\begin{aligned}\varepsilon(t, t_0) &= \sigma(t_0) \left[\frac{1}{E(t_0)} + \frac{1}{E_0} \beta_f \alpha_f \phi_c K_1(t_0) K_2(t - t_0) \right] \\ &= \sum \Delta \sigma(t_i) \left[\frac{1}{E(t_i)} + \frac{1}{E_0} \beta_f \alpha_f \phi_c K_1(t_0) K_2(t - t_0) \right]\end{aligned}$$

III-40

Si le module d'élasticité est une constante alors l'équation 3-40 deviendra :

$$\begin{aligned}\varepsilon(t, t_0) &= \frac{\sigma(t)}{E_0} + \frac{\beta_f \alpha_f \phi_c}{E_0} [\sigma(t_0) K_1(t_0) K_2(t - t_0) + \\ &+ \sum \Delta \sigma(t_i) K(t_i) K(t - t_i)]\end{aligned}$$

III-41

- La méthode des déformations séparées

On suppose que :

$$F(t, t_0) = F_d(t - t_0) + F_f(t) - F_f(t_0)$$

III-42

par conséquent

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E(t_0)} + F_d(t - t_0) + F_f(t) - F_f(t_0)$$

III-43

$$= \frac{1}{E(t_0)} + \frac{1}{E_0} [\varphi_d(t - t_0) + \varphi_f(t) - \varphi_f(t_0)]$$

$$= \frac{1}{E(t_0)} + \frac{1}{E_{28}} [\varphi_{d\infty} V_1(t - t_0) + \varphi_{f\infty} \{V_2(t) - V_2(t_0)\}]$$

où :

$F_d(t - t_0)$ déformation différée réversible

$F_f(t) - F_f(t_0)$ déformation différée irréversible

$\varphi_{d\infty} = 0,4$ valeur finale de la déformation différée réversible.

$\varphi_{f\infty} = \varphi_e \varphi_o$ Valeur finale de la déformation différée irréversible.

φ_e Coefficient de la plus petite dimension de la pièce ou du rayon moyen de la pièce.

φ_o Coefficient de composition du béton et de la condition climatique.

$V_1(t-t_o)$ Fonction variant de 0 à 1 représentant la vitesse de développement de la déformation reversible

V_2 Fonction variant de 0 à 1 représentant la vitesse de développement de la déformation irréversible

V_1 et V_2 sont donnés graphiquement

t_o âge de chargement

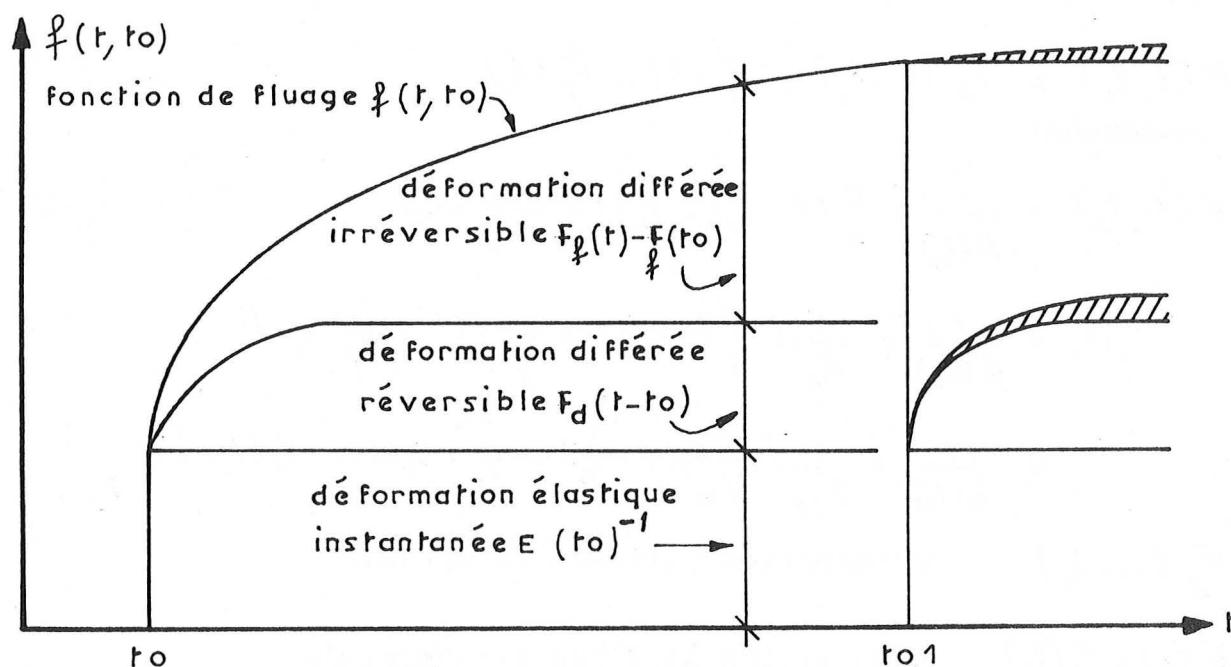


Fig. III-18

Dans la formule III-42, $F_f(t) - F_f(t_0)$ représente la déformation irréversible, quand l'on charge un vieux béton, c'est-à-dire : Si t_0 tend vers t , alors la déformation différée irréversible tend vers zéro, par contre la déformation différée réversible $F_d(t - t_0)$ qui est seulement fonction de la durée de charge et non de de l'instant de charge, garde la même expression. Quand l'on supprime la charge, la déformation réversible disparaît entièrement, si le temps t est assez long.

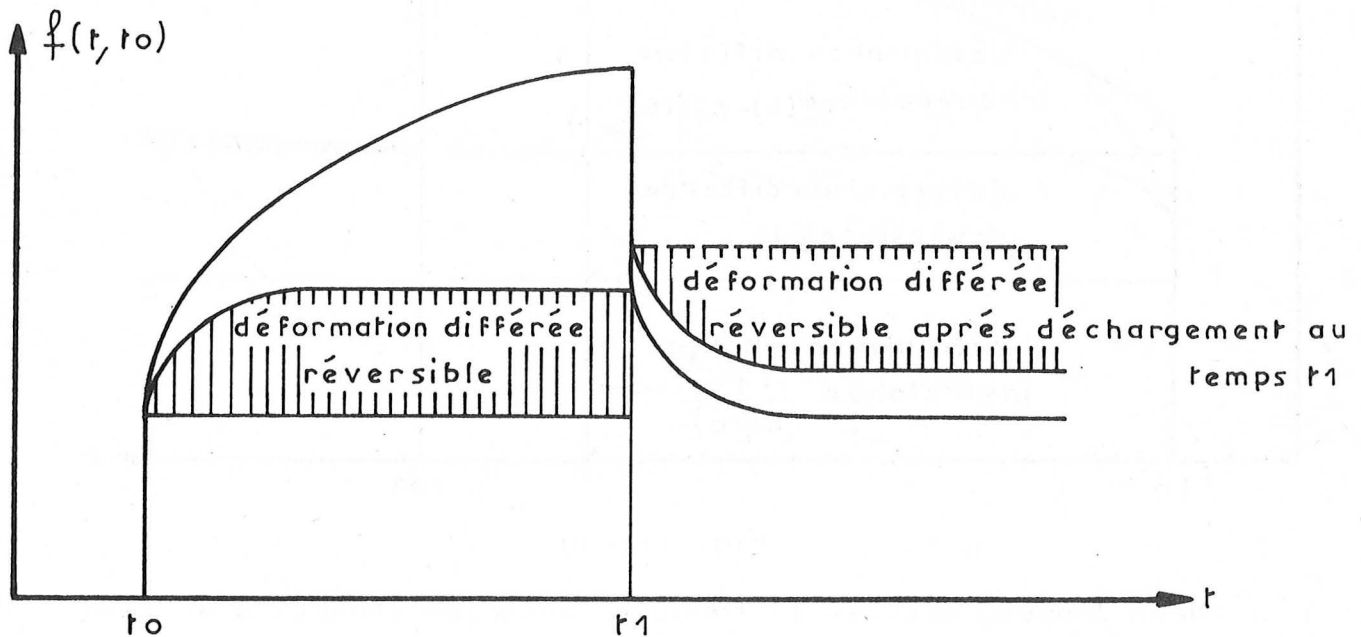


Fig. III-19

Etant donné que la courbe $F_d(t - t_0)$ tend vers l'asymptote assez vite, nous pouvons supposer que $F_d(t - t_0) = F_{d\infty} = \text{constante}$, alors la formule (3-43) devient :

$$\begin{aligned}
 f(t, t_0) &= \frac{1}{E(t_0)} + F_{d\infty} + F_f(t) - F_f(t_0) \\
 &= \frac{1}{E(t_0)} + \frac{1}{E_0} [F_{d\infty} - F_f(t) - F_f(t_0)]
 \end{aligned}
 \tag{III-44}$$

Si le module d'élasticité est constant, la formule peut s'écrire sous la forme suivante

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E_0} [1 + \varphi_{d\infty} + \varphi_f(t) - \varphi_f(t_0)]$$

Dans ce cas, la figure III-19 devient la figure III-20 suivante :

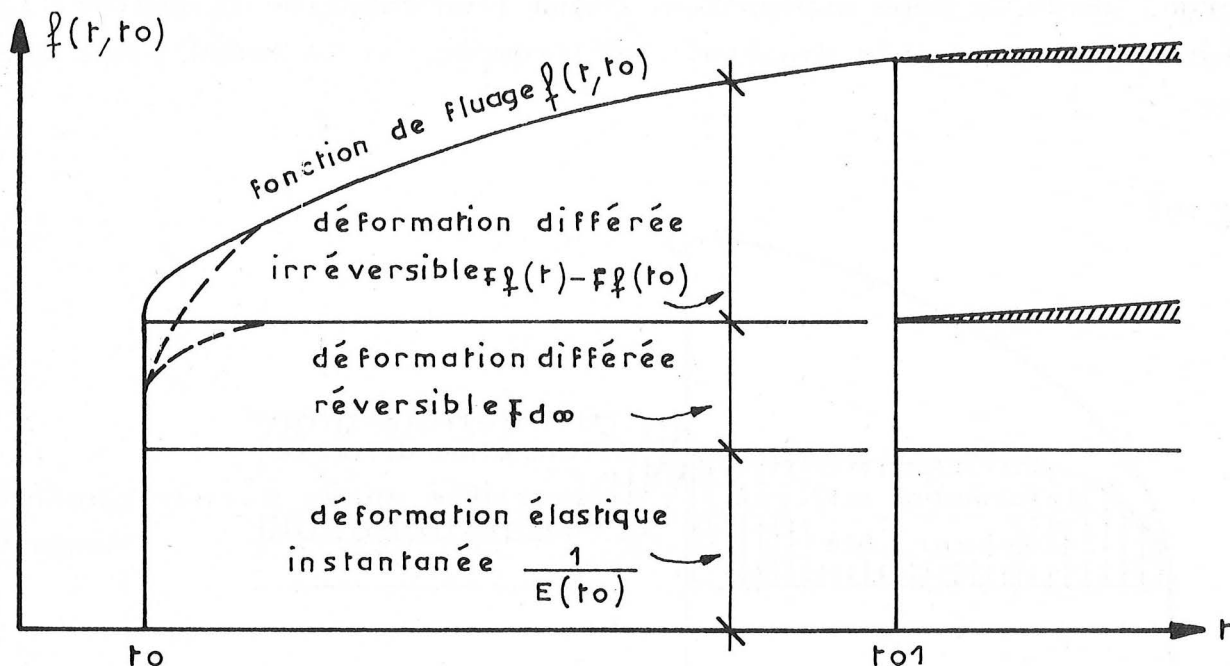


Fig. III-20

Nous pouvons obtenir la fonction associée (Fonction de relaxation) pour un module d'élasticité constant comme suit :

$$\begin{aligned} \gamma_f(t, t_0) &= \frac{E_0}{1 + E_0 F_{d\infty}} - \frac{E_0}{1 + E_0 F_{d\infty}} \left\{ 1 - e^{-\frac{E_0}{1 + E_0 F_{d\infty}} [F_f(t) - F_f(t_0)]} \right\} \\ &= \frac{E_0}{1 + \varphi_{d\infty}} - \frac{E_0}{1 + \varphi_{d\infty}} \left\{ 1 - e^{-\frac{1}{1 + \varphi_{d\infty}} [\varphi_f(t) - \varphi_f(t_0)]} \right\} \end{aligned} \quad \text{III-45}$$

b) Fonction de relaxation considérée comme fonction primaire.

d'après la formule (III-13)

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 r(t, t_0)$$

On a

$$\begin{aligned} r(t, t_0) &= r(t, t_0) - G(t_0, t) \\ &= E(t_0) - G(t_0, t) \end{aligned}$$

où $E(t_0) = r(t_0, t_0)$ est la contrainte due à une déformation unité.

Alors nous pouvons considérer que la fonction $G(t_0, t)$ joue le même rôle que la fonction $F(t, t_0)$ du paragraphe précédent. En réalité $G(t_0, t)$ est la fonction duale de $F(t_0, t)$. Par conséquent tous les résultats précédents peuvent s'appliquer à la fonction $G(t, t_0)$. Par exemple si l'on suppose que $G(t, t_0)$ se présente sous la forme suivante :

$$G(t, t_0) = G(t - t_0)$$

III-46

alors on obtiendra immédiatement les propriétés suivantes.

1) La contrainte différée disparaît entièrement quand la durée de déchargement de déformation est assez longue.

2) Les courbes de relaxation peuvent se déduire par une simple translation.

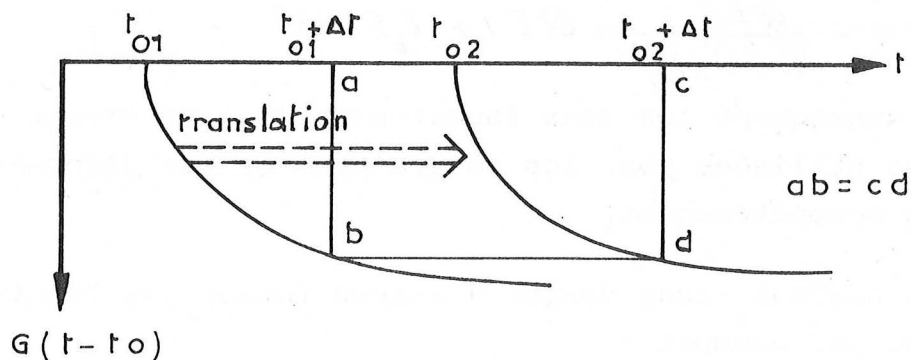


Fig. III-21

Si $G(t_0, t)$ a la forme suivante

$$G(t, t_0) = G(t - t_0) = G(\infty) [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]$$

III-47

alors

$$r(t, t_0) = E_0 - G(\infty) [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]$$

III-48

et la fonction de fluage correspondante est :

$$f(t - t_0) = \frac{1}{E_0} + \frac{G(\infty)}{E_0 - G(\infty)} \frac{1}{E_0} [1 - e^{-\frac{E_0 - G(\infty)}{E_0} \beta(t-t_0)}]$$

III-49

La fonction de relaxation $r(t, t_0)$ ne peut pas représenter le béton jeune comme la formule III-34.

En comparant III-49 et III-35 on a :

$$\varphi(\infty) = \frac{G(\infty)}{E_0 - G(\infty)} = E_0 F(\infty)$$

$$G(\infty) = E_0 F(\infty) [E_0 - G(\infty)]$$

$$G(\infty) + E_0 F(\infty) G(\infty) = E_0 F(\infty) E_0$$

$$G(\infty) = \frac{E_0 F(\infty)}{1 + E_0 F(\infty)} E_0 \quad \text{III-50}$$

On a aussi :

$$- \frac{E_0 - G(\infty)}{E_0} \beta = - \theta$$

alors :

$$\beta = - \frac{Q E_0}{G(\infty) - E_0} = Q [1 + E_0 F(\infty)] \quad \text{III-51}$$

Par conséquent les deux formules III-35 et III-49 sont équivalentes et sont utilisées pour les contraintes et les déformations prescrites respectivement.

Nous pouvons aussi donner d'autres formes aux fonctions de relaxation, par exemple :

$$1) r(t, t_0) = E(t_0) - R(\infty, t_0) (1 - e^{-\beta(t-t_0)}) \quad \text{III-52}$$

Cette formule est proposée par M. Courbon.

$$2) r(t, t_0) = E_0 - E_1 \left[1 - e^{E_1 F(\infty) \left[\frac{t}{t+\delta} - \frac{t_0}{t_0+\delta} \right]} \right] \quad \text{III-53}$$

Cette formule est proposée par M. Levi.

III.7. APPLICATION AUX SYSTEMES HYPERSTATIQUES

III.7.1. Contraintes imposées

Considérons un système n fois hyperstatique et le système isostatique associé obtenu en supprimant les n liaisons surabondantes, auxquelles correspondent les réactions hyperstatiques R_j ($j = 1 \dots n$). Le système hyperstatique réel est soumis aux forces extérieures X_i ($i = 1, \dots, m$).

Dans l'hypothèse du fluage linéaire, le déplacement $v_k(t)$, au temps t postérieur au temps t_0 début de l'application des forces, a pour expression

$$V_k(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[\sum_i a_k^i X_i^{iso}(t_0) + \sum_j b_k^j R_j^{iso}(t_0) \right] + \int_{t_0}^t \frac{1}{E(\theta, t)} d \left[\sum_i a_k^i X_i^{iso}(\theta) + \sum_j b_k^j R_j^{iso}(\theta) \right] \quad \text{III-54}$$

avec

$$a_k^i \quad b_k^j \quad \text{Coefficients d'influence } (k = 1, \dots, n)$$

une intégration par parties de III-54 nous donne :

$$V_k(t) = \frac{1}{E(t, t)} \left[\sum_i a_k^i X_i^{iso}(t) + \sum_j b_k^j R_j^{iso}(t) \right] - \int_{t_0}^t \left[\sum_i a_k^i X_i^{iso}(\theta) + \sum_j b_k^j R_j^{iso}(\theta) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{E(\theta, t)} \right) d\theta \quad \text{III-55}$$

on a :

$$\sum_{i=1}^m a_k^i X_i(t) + \sum_{j=1}^n b_k^j R_j(t) = 0 \quad (k = 1 \dots n) \quad \text{III-56}$$

en remplaçant $X_i^{iso}(t)$ par $X_i(t)$, $R_j^{iso}(t)$ par $R_j(t)$ et en tenant compte de la relation 3-56, valable quelque soit t , nous pouvons dégager la conclusion suivante :

Dans l'hypothèse du fluage linéaire du béton, l'équilibre d'un système hyperstatique, soumis à des forces variables dans le temps, se confond à tout moment avec l'équilibre élastique correspondant à

un module de déformation constant, en particulier lorsqu'un pont est coulé sur cintre, le béton ayant été décoffré en même temps et ayant le même âge dans tout l'ouvrage, les réactions hyperstatiques ne varient pas en fonction du temps.

III.7.2. Déformations imposées

Pour diminuer les moments fléchissants et la portée d'un arc etc....., on dénivelé souvent les appuis des poutres hyperstatiques continues. Si au temps t_0 , nous imposons des déplacements V_k^0 constants dans le temps alors nous avons

$$V_k^0 = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_k^j R_j^d(t_0) \quad \text{III-57'}$$

où $R_j^d(t_0)$ sont des réactions dues au dénivellement au temps t_0 .

au temps $t > t_0$ nous avons :

$$V_k^0 = \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j R_j^d(t_0) - \sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{1}{E(\theta, t)} dR_j^d(\theta) \quad \text{III-57}$$

en égalant les formules (3-56) et (3-57) nous avons :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{R_j^d(\theta)}{E(\theta, t)} d\theta = -F(t_0, t) \sum_j b_k^j R_j^d(t_0) \quad \text{III-58}$$

$$\text{où } F(t_0, t) = \frac{1}{E(t_0, t)} - \frac{1}{E(t_0, t_0)}$$

Il en résulte que la diminution $S_j(t)$ de la réaction compensatrice $R_j^d(t)$ est la suivante :

$$S_j(t) = R_j^d(t_0) - R_j^d(t) \quad \text{III-59}$$

d'où

$$\int_{t_0}^t \frac{S_j(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = R_j^d(t_0) F(t_0, t)$$

$$S_j(t) = R_j^d(t_0) \Phi(t_0, t)$$

$$R_j^d(t) = R_j^d(t_0) [1 - \phi(t_0, t)]$$

III-60

Si

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E}\right) [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]$$

Nous aurons :

$$R_j^d(t) = R_j^d(t_0) \left[\frac{K}{E} - \frac{E-K}{E} e^{-\gamma(t-t_0)} \right]$$

III-61

ou

$$\gamma = \beta \frac{E}{K}$$

III.7.3. . Influence du mode de construction

Si le système qui est isostatique au temps t_0 devient hyperstatique au temps $t > t_0$ et si l'on avait construit d'emblée le système, par exemple en l'exécutant sur cintre, les réactions hyperstatiques auraient eu les valeurs R_j^* définies par les équations.

$$\sum_i a_k^i X_i - \sum_j b_k^j R_j^* = 0$$

III-62

le déplacement du système isostatique au moment t_0 à la valeur :

$$V_k = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_i a_k^i X_i$$

III-63

après le rétablissement des liaisons surabondantes, nous aurons :

$$V_k = \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_i a_k^i X_i + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{R_j^{M'}(\theta)}{E(\theta, t)} d\theta$$

III-64

en égalant (3-63) et (3-64) et en introduisant (3-62) nous avons :

$$\int_{t_0}^t \frac{R_j^{M'}(\theta)}{E(\theta, t)} d\theta = R_j^* F(t_0, t)$$

d'où

$$R_j^M = R_j^* \phi(t_0, t)$$

Si les forces X_1 sont appliquées au temps $t_1 < t_0$, avec le même raisonnement, nous aurons

$$R_j^M = R_j^* \phi_1(t_0, t)$$

où ϕ_1 est la solution de l'équation intégrale

$$\int_{t_0}^t \frac{\phi_1'(\theta)}{E(\theta, t)} d\theta = F_1(t_0, t)$$

Si on utilise la loi suivante

$$F_1(t_0, t) = \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E}\right) \left[e^{-\beta(t_0 - t_1)} - e^{-\beta(t - t_1)} \right] \quad \text{III-65}$$

nous aurons comme réactions

$$R_j^M(t) = R_j^* e^{-\beta(t_0 - t_1)} \left(1 - \frac{K}{E}\right) [1 - e^{-\gamma(t - t_0)}] \quad \text{III-66}$$

dans le cas d'un pont construit en encorbellement, nous avons les réactions comme suit :

$$R_j^M(t) = \left(1 - \frac{K}{E}\right) [1 - e^{-\gamma(t - t_0)}] \sum_j R_j^* e^{-\beta(t_0 - t_1)} \quad \text{III-67}$$

($t_1 < t_0$)

Etant donné que la précontrainte est considérée comme un système de forces extérieures appliquées au système à l'instant t_0 , la précontrainte donne, si le système n'est pas concordant, des réactions hyperstatiques P_j , invariables dans le temps.

Dans le cas le plus complet (précontrainte non concordante, dénivellation) nous avons :

$$R_j(t) = P_j + R_j^d(t) + R_j^M(t)$$

III.7.4. Déformations différées

Soit un système hyperstatique sous des charges extérieures X_1 et des précontraintes p_M constantes toutes les deux dans le temps, nous avons le déplacement $V_M(t)$ du point M au temps $t > t_0$

$$V_M(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} [V_M^P + \sum_i \alpha_M^i X_i] + \sum_j \beta_M^j \int_{t_0}^t \frac{R_j'(\theta)}{E(\theta, t)} d\theta \quad \text{III-68}$$

où $\frac{V_M^P}{E(t_0, t)}$ le déplacement vertical dû à la précontrainte au point M d'un système hyperstatique.

en tenant compte de l'équation (3-63) nous avons

$$V_M(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} [V_M^P + \sum_i \alpha_M^i X_i] + F(t_0, t) \sum_j \beta_M^j R_j^* \quad \text{III-69}$$

par conséquent le déplacement différé au temps $t > t_0$ est :

$$\begin{aligned} \delta_M(t) &= V_M(t) - V_M(t_0) \\ &= F(t_0, t) [V_M^P + \sum_i \alpha_M^i X_i + \sum_j \beta_M^j R_j^*] \end{aligned} \quad \text{III-70}$$

ou bien

$$\delta_M(t) = \left[\frac{E(t_0, t_0)}{E(t_0, t)} - 1 \right] V_M^P(t_0) + F(t_0, t) \sum_j \beta_M^j R_j^* \quad \text{III-71}$$

Dans le cas le plus complet (précontrainte non concordante, dénivellation) nous avons :

$$\delta_M(t) = F(t_0, t) [V_M^P + \sum_i \alpha_M^i X_i + \sum_j \beta_M^j (P_j + R_j^*)]$$

c'est-à-dire que d'après la théorie du fluage linéaire, le déplacement des appuis ne produit pas de déplacements différés.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES DU CHAPITRE III

- III.1. J. COURBON
L'influence du fluage linéaire sur l'équilibre des systèmes hyperstatiques en béton précontraint.
Annales de l'I.T.B.T.P.
Février 1968 - N° 242
- III.2. Y. GUYON
Constructions en béton précontraint, collection de l'I.T.B.T.P.
Eyrolles 1966 Paris.
- III.3. N. Kh. AROUTIOUNIAN
Application de la théorie du fluage, Edition Eyrolles
Paris 1957.
- III.4. W. NOWACKI
Théorie du fluage,
Editions Eyrolles Paris 1965.
- III.5. J. FAUCHART
Béton Précontraint
Cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Paris.
- III.6. M.Y. LAU
Redistribution des réactions hyperstatiques des Ponts en Béton précontraint par retrait, fluage et relaxation.
Rapport interne du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées Paris.
- III.7. Symposium
L'influence du fluage et du retrait, l'effet des changements de température sur les constructions en béton -

Association internationale des Ponts et Charpentes
Madrid 1970.

III.8. Bulletin d'information n° 80

Effets structuraux des déformations différées du béton
15è session Plénière du Comité Européen du béton, Leningrad
Mai 1972.

III.9. Bulletin d'information n° 94

Effets structuraux du fluage et des déformations différées
16è session Plénière du Comité Européen du béton
Londres Octobre 1973.

CHAPITRE IV

THÉORIE DU FLUAGE LINÉAIRE DU BÉTON ET DE LA RELAXATION DES ACIERS COMBINÉS

SOMMAIRE

IV.1.	INTRODUCTION	90
IV.2.	COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DE L'ACIER	91
IV.3.	EQUATION FONDAMENTALE	93
IV.4.	REDISTRIBUTION DES EFFORTS PAR FLUAGE DANS LES PONTS CONSTRUITS PAR ENCORBELLEMENT	101
4.1.	Introduction	101
4.2.	Méthode de calcul proposée	103

NOTATIONS

C_t	seuil de tension
ψ_a^*	fonction de relaxation de l'acier (matériau non vieillissant)
φ_a^*	fonction du fluage de l'acier
ε_{a0}	déformation constante de l'essai de relaxation
ε_{ap}	déformation plastique instantanée (déformation d'écrouissage)
ε_{ca}	déformation du seuil de tension
$\sigma_a^*(t), \varepsilon_a^*(t)$	définies par les relations
$\sigma_a^*(t) = \sigma_a(t) - \sigma_{ca}$ $\varepsilon_a^*(t) = \varepsilon_a(t) - (\varepsilon_{ca} - \varepsilon_{ap})$	
$\varepsilon_r(t)$	retrait libre du béton
$\phi_b(t)$	fonction spécifique du fluage du béton (matériau non vieillissant)
$\sigma_b(t), \varepsilon_b(t)$	respectivement contrainte et déformation du béton au niveau des armatures actives.
$\sigma_a^R(t)$	tension résiduelle de l'acier dans l'essai de relaxation des aciers avec contrainte initiale
$\Delta \sigma_F^0$	perte par fluage du béton sous l'effet de la contrainte initiale du béton
$\Delta \sigma_r$	perte par retrait du béton
$\Delta \sigma_R$	perte par relaxation des armatures actives sous l'effet de la tension initiale
ϕ	coefficient de fluage tel qu'il est défini dans les règlements FIP-CEB.

m_a, m_p	Coefficients d'équivalence.
β_f	Coefficient de composition du béton.
α_f	Coefficient du rayon de la pièce
$K_1(t_0)$	Représente le degré du vieillissement du béton à l'âge t_0 de l'application de la sollicitation
$K_2(t-t_0)$	Traduit l'effet de la durée de la charge supportée par le béton.
ϵ_r	Retrait du béton.
ψ	Coefficient de relaxation des armatures actives.
K_a, K_p	Coefficients sans dimension
	$K_a = \frac{S_a}{S_b} \left(1 + e^2 \frac{S_b}{I_b} \right) (E_a / E_b)$ $K_p = \frac{S_p}{S_b} \left(1 + e^2 \frac{S_b}{I_b} \right) (E_a / E_b)$
t_0	Temps de la mise en précontrainte de la section x
t_c	Temps de clavage
t_i	Temps au ième intervalle
M_0	Moment total de la section x immédiatement après clavage.
ΔM_k	Moments successifs de redistribution.

IV – THÉORIE DU FLUAGE LINÉAIRE DU BÉTON ET DE LA RELAXATION DES ACIERS COMBINÉS

IV.1. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons établi une série de formules supposant que le fluage est dû seulement au béton d'une part et que la précontrainte des câbles est constante dans le temps d'autre part. En effet, dans les structures précontraintes, le béton et les armatures coexistent dans un même corps et forment un système en auto-équilibre visco-élastique sans aucune intervention extérieure ce qui signifie que toute variation de contrainte ou de déformation de l'un des deux matériaux se répercute instantanément sur l'autre et crée de nouvelles conditions d'équilibre et d'évolution de l'ensemble du système. C'est précisément l'interaction de ces phénomènes que nous avons tenté d'analyser par l'application des lois de la rhéologie, et de vérifier par l'expérience.

Il est encore d'usage d'estimer les pertes de précontrainte différées en additionnant les pertes par fluage et retrait du béton, et par relaxation des armatures actives.

Il est cependant connu depuis longtemps que ce cumul conduit à une surestimation non négligeable des pertes différées. Pour tenir compte de ce fait, les recommandations du Comité FIP-CEB 1970 publiées à la suite du Congrès de Prague et les nouvelles directives provisoires françaises ont introduit des termes correctifs dans la formule initiale.

Cette méthode d'estimation des pertes de précontrainte ne permet pas, à cause de son caractère semi-empirique, de mesurer l'ensemble des conséquences qui résultent du phénomène de fluage et relaxation combinés, notamment sur les déformations différées, nécessaires aux calculs des augmentations des flèches et des varia-

IV.2. COMPORTEMENT RHEOLOGIQUE DE L'ACIER

1) Il existe un seuil de tension C_1 ; quand la tension descend au dessous de ce seuil C_1 , les phénomènes de fluage et de relaxation des aciers sont négligeables. Ce seuil correspond en général à une contrainte σ_{ca} estimée à 50 % de la résistance à la traction de l'acier.

Par conséquent le seuil C_1 en question devient C'_1 après écrouissage de l'acier. Le graphe contraintes-déformations réelles est $O' C'_1 C_2 C_3$.

Par un changement de coordonnées du point O à la position C'_1 , on se ramène au cas du béton étudié précédemment. On utilise les indices "b" et "a" pour distinguer les fonctions appartenant au béton et à l'acier.

$$\varphi_a^*(t) = \frac{\varepsilon_a^*(t)}{\sigma_{a0}^*} = \frac{\varepsilon_a(t) - (\varepsilon_{ca} + \varepsilon_{ap})}{\sigma_{a0} - \sigma_{ca}} \quad \text{IV-1}$$

$$\psi_a^*(t) = \frac{\sigma_a^*(t)}{\varepsilon_{a0}^*} = \frac{\sigma_a^R(t) - \sigma_{ca}}{\varepsilon_{a0} - (\varepsilon_{ca} + \varepsilon_{ap})} \quad \text{IV-2}$$

Où ε_{a0} et ε_{ap} sont respectivement la déformation totale et la déformation plastique instantanées. Les relations de comportement de l'acier sont semblables à celles du béton.

$$\sigma_a^*(t) = \varepsilon_a^*(t) \psi_a^*(0) - \int_0^t \varepsilon_a^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_a^*(t - \tau) d\tau \quad \text{IV-3}$$

$$\varepsilon_a^*(t) = \sigma_a^*(t) \varphi_a^*(0) - \int_0^t \sigma_a^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_a^*(t - \tau) d\tau \quad \text{IV-4}$$

avec $\psi_a^*(0) = \frac{\varepsilon_a^*(0)}{\varepsilon_{a0}^*} = E_{0a} \quad \text{IV-5}$

$$\varphi_a^*(0) = \frac{\varepsilon_a^*(0)}{\sigma_{a0}^*} = \frac{1}{E_{0a}} \quad \text{IV-6}$$

où ψ_a^* : fonction de relaxation de l'acier (matériau non vieillissant)
 φ_a^* : fonction de fluage de l'acier
 ε_{ca} : déformation du seuil de tension.

IV.3. EQUATIONS FONDAMENTALES

Pour établir des équations fondamentales qui tiennent compte de l'interdépendance de la relaxation des aciers actifs et du fluage du béton, les hypothèses prises en compte sont les suivantes :

- 1) Les comportements rhéologiques du béton et de l'acier actif sont supposés linéaires.
- 2) L'acier passif est supposé travailler de manière parfaitement élastique.
- 3) La vitesse de déformation de l'armature active ou passive et celle du béton au même niveau sont égales.
- 4) Les forces dans les sections sont équilibrées.

Ainsi nous pouvons obtenir un système de six équations pour les six fonctions temporelles inconnues ($\sigma_a(t)$, $\epsilon_a(t)$, $\sigma_p(t)$, $\epsilon_p(t)$, $\sigma_b(t)$ et $\epsilon_b(t)$).

$$\epsilon_b(t) = \phi_b(0) \cdot \sigma_b(t) - \int_0^t \sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \phi_b(t-\tau) d\tau + \epsilon_r(t) \quad \text{IV-7}$$

$$\sigma_a^*(t) = \psi_a^*(0) \epsilon_a^*(t) - \int_0^t \epsilon_a^*(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_a^*(t-\tau) d\tau \quad \text{IV-8}$$

$$\sigma_p(t) = E_p \cdot \epsilon_p(t) \quad \text{IV-9}$$

$$\dot{\epsilon}_a(t) = \dot{\epsilon}_b(t) \quad \text{IV-10}$$

$$\epsilon_p(t) = \epsilon_b(t) \quad \text{IV-11}$$

$$\sigma_b(t) + \sigma_p(t) \cdot \omega_p - \sigma_a(t) \cdot \omega_a = 0 \quad \text{IV-12}$$

avec :

$\epsilon_r(t)$ retrait libre du béton,

$\phi_b(t)$ fonction spécifique du fluage du béton considéré comme un matériau non vieillissant. C'est la déformation (instantanée + différée) sous l'effet d'une contrainte égale à l'unité,

$\sigma_b(t), \epsilon_b(t)$ respectivement la contrainte et la déformation du béton au niveau des armatures actives,

$\sigma_a^*(t), \epsilon_a^*(t)$ définies par les relations :

$$\begin{aligned}\sigma_a^* &= \sigma_a(t) - \sigma_{ca} \\ \epsilon_a^* &= \epsilon_a(t) - (\epsilon_{ca} + \epsilon_{ap})\end{aligned}$$

$\sigma_a^R(t)$ tension résiduelle de l'acier dans l'essai de relaxation de l'acier avec contrainte initiale

$\sigma_a(t), \epsilon_a(t)$ contrainte et déformation des armatures actives,

$\sigma_p(t), \epsilon_p(t)$ contrainte et déformation des armatures passives,

ω_p, ω_a facteurs définissant la forme géométrique de la section considérée :

$$\omega_p = \alpha \frac{s_p}{s_b}, \omega_a = \alpha \frac{s_a}{s_b} \quad \text{avec } \alpha = 1 + e^2 \cdot \frac{s_b}{I_b}$$

s_a, s_p, s_b respectivement la section des armatures actives, des armatures passives et du béton,

e excentricité des armatures actives supposée égale à celle des armatures passives,

I_b moment d'inertie de la section du béton.

Le calcul symbolique offre, grâce au théorème de convolution, un moyen rapide pour déterminer l'équilibre asymptotique (ou permanent) du système. En utilisant la transformation de Laplace * ce système d'équation s'écrit :

$$\bar{\epsilon}_b(P) = P \bar{\sigma}_b(P) \bar{\phi}_b(P) + \bar{\epsilon}_r(P) \quad \text{IV-13}$$

$$\bar{\sigma}_a(P) = P \bar{\epsilon}_a(P) \bar{\psi}_a^*(P) + \frac{\sigma_{ca}}{P} - (\epsilon_{ca} + \epsilon_{ap}) \bar{\psi}_a^*(P) \quad \text{IV-14}$$

$$\bar{\sigma}_p(P) = E_p \bar{\epsilon}_p(P) \quad \text{IV-15}$$

$$\bar{\epsilon}_a(P) = -\bar{\epsilon}_b(P) + \frac{\sigma_a(0)}{P} \left[\frac{1}{E_a} + \frac{\omega_a}{E_b + E_p \omega_p} \right] + \frac{\epsilon_{ap}}{P} \quad \text{IV-16}$$

$$\bar{\epsilon}_p(P) = \bar{\epsilon}_b(P) \quad \text{IV-17}$$

$$\bar{\sigma}_b(P) + \bar{\sigma}_p(P) \cdot \omega_p - \bar{\sigma}_a(P) \cdot \omega_a = 0 \quad \text{IV-18}$$

avec :

E_b, E_p, E_a modules d'élasticité respectivement du béton, des armatures passives et des armatures actives,

$\sigma_a(0)$ tension initiale des armatures actives.

* L'image de Laplace d'une fonction $\sigma(t)$ est définie comme suit :

$$\bar{\sigma}(P) = \int_0^{\infty} \sigma(t) e^{-Pt} dt$$

La résolution de ce système par rapport à $\sigma_a(p)$ et $\epsilon_b(p)$ donne :

$$\bar{\sigma}_a(p) = \frac{\sigma_a(0)}{p} \cdot \frac{\frac{1-\beta}{E_a} + \frac{\omega_a}{E_p + E_p \omega_p} - \frac{P \cdot \bar{\epsilon}_r(p)}{\sigma_a(0) [1 + E_p \omega_p \cdot P \bar{\phi}_b(p)]} + \frac{\beta}{P \bar{\psi}_a^*(p)}}{\frac{1}{P \bar{\psi}_a^*(p)} + \frac{\omega_a P \bar{\phi}_b(p)}{1 + E_p \omega_p P \bar{\phi}_b(p)}} \quad \text{IV-19}$$

$$\bar{\epsilon}_b(p) = \frac{\omega_a}{1 + \omega_p E_p} \frac{\bar{\sigma}_a(p) \cdot P \bar{\phi}_b(p) + \bar{\epsilon}_r(p)}{P \bar{\phi}_b(p)} \quad \text{IV-20}$$

avec :

$$\beta = \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_a(0)}$$

Le théorème de la valeur finale * correspondant à la transformation de Laplace, permet de déduire directement des relations (4-19) et (4-20) les valeurs finales de $\sigma_a(\infty)$ et de $\epsilon_b(\infty)$.

$$\sigma_a(\infty) = \sigma_a(0) \cdot \frac{\frac{1-\beta}{E_a} + \frac{\omega_a}{E_b + E_p \omega_p} - \frac{\epsilon_r(\infty)}{\sigma_a(0) [1 + E_p \omega_p \bar{\phi}_b(\infty)]} + \frac{\beta}{\bar{\psi}_a^*(\infty)}}{\frac{1}{\bar{\psi}_a^*(\infty)} + \frac{\omega_a \bar{\phi}_b(\infty)}{1 + E_p \omega_p \bar{\phi}_b(\infty)}} \quad \text{IV-21}$$

$$\epsilon_b(\infty) = \frac{\omega_a}{1 + E_p \omega_p} \frac{\sigma_a(\infty) \bar{\phi}_b(\infty) + \epsilon_r(\infty)}{\bar{\phi}_b(\infty)} \quad \text{IV-22}$$

Les valeurs des fonctions spécifiques $\bar{\psi}_a$ et $\bar{\phi}_b$ sont liées aux valeurs des phénomènes respectivement de relaxation et de fluage à partir desquels elles ont été définies, comme le sont par ailleurs, les pertes élémentaires utilisées dans les règlements ; il est utile du point de vue pratique de les exprimer, ainsi que le retrait du béton, en fonction de ces dernières :

* Ce théorème s'énonce comme suit :

$$\lim_{p \rightarrow 0} P \bar{\sigma}(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t)$$

$$\psi_a^* = E_a \left[1 - \frac{\Delta\sigma_R}{\sigma_a(o) - \sigma_{ca}} \right] \quad \text{IV-23}$$

$$\phi_b = \frac{1}{E_b} (1+\phi) = \frac{1}{E_b} \left[1 + \frac{\Delta\sigma_F^0}{\sigma_b(c) m_a} \right]$$

$$\epsilon_r = \frac{\Delta\sigma_r}{E_a} \quad \text{IV-24}$$

ϕ coefficient de fluage tel qu'il est défini dans les règlements FIP-CEB.

$\Delta\sigma_F^0$ perte par fluage du béton sous l'effet de la contrainte initiale du béton $\sigma_b(o)$,

$\Delta\sigma_r$ perte par retrait du béton,

$\Delta\sigma_R$ perte par relaxation des armatures actives sous l'effet de la tension initiale $\sigma_a(o)$

m_a, m_p coefficients d'équivalence

$$m_a = E_a/E_b \text{ and } m_p = E_p/E_b$$

Ces relations et l'équation (4-21) conduisent à la formule (4-25) qui permet de calculer la perte totale de tension dans les armatures actives en fonction de $\Delta\sigma_F^0$, $\Delta\sigma_r$ et $\Delta\sigma_R$.

$$\Delta\sigma_a = \frac{\Delta\sigma_F^0 + \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_R - \xi\Delta\sigma_R (\Delta\sigma_F^0 + \Delta\sigma_r) + \Delta\sigma_R K_p (1+\phi)}{1 + K_p (1+\phi) + [K_a + \frac{\Delta\sigma_F^0}{\sigma_a(o)} (1+K_p)] [1-\xi\Delta\sigma_R]} \quad \text{IV-25}$$

avec :

$$K_p = \omega_p m_p, K_a = \omega_a m_a \text{ et } \xi = \frac{1}{\sigma_a(o) - \sigma_{ca}}$$

D'une manière analogue, on peut établir des formules pour le calcul de la perte de compression $\Delta\sigma_b$ et de la déformation différée $\Delta\epsilon_b$ des fibres du béton au niveau des armatures actives :

$$\Delta\sigma_b = \frac{\omega_a \Delta\sigma_a}{1+K_p(1+\phi)} \left[1 + \frac{K_p}{K_a} \cdot \frac{\Delta\sigma_F^0 + \Delta\sigma_r}{\Delta\sigma_a} \right] \quad \text{IV-26}$$

$$\Delta \epsilon_b = \frac{1}{E_b} \left[\frac{\Delta \sigma_F^0 + \Delta \sigma_r}{m_a} - \Delta \sigma_b (1+\phi) \right] \quad \text{IV-27}$$

Dans le cas des hypothèses admises*, les pertes et les déformations différées sont indépendantes de l'histoire des fonctions ϕ_b et ψ_a^* . Ceci signifie que les formules 4-25, 4-26 et 4-27 peuvent être utilisées à un instant quelconque t_n : il suffit alors de remplacer les valeurs finales de $\Delta \sigma_F$, $\Delta \sigma_r$, $\Delta \sigma_R$ et ϕ par les valeurs correspondant à l'instant t_n .

En précontrainte intégrale ($\omega = 0$) il est d'usage, pour des raisons de commodité de calcul, d'utiliser dans la formule de calcul des pertes différées, la perte par fluage sous l'effet de la contrainte finale du béton $\Delta \sigma_F^\infty$ au lieu de la perte par fluage sous l'effet de la contrainte initiale du béton $\Delta \sigma_F^0$; en posant dans la formule (4-25) $\omega_p = 0$ et en remplaçant $\Delta \sigma_F^0$ par sa valeur :

$$\Delta \sigma_F^0 = \Delta \sigma_F^\infty \cdot \frac{\sigma_a(0)}{\sigma_a(0) - \Delta \sigma_a} \quad \text{IV-28}$$

nous obtenons une équation du 2ème degré en $\Delta \sigma_a$ dont la racine à retenir est la formule suivante :

$$\Delta \sigma_a = \frac{\Delta \sigma_F^\infty + \Delta \sigma_r + \Delta \sigma_R - \xi \Delta \sigma_R (\Delta \sigma_F^\infty + \Delta \sigma_r)}{1 + \omega_a m_a (1 - \xi \Delta \sigma_R)} \quad \text{IV-29}$$

La validité de la formulation exposée dans cette partie théorique de l'étude peut être établie de la manière suivante :

- déterminer expérimentalement les pertes élémentaires $\Delta \sigma_F$, $\Delta \sigma_r$ et $\Delta \sigma_R$ par des essais classiques de fluage de retrait et de relaxation ;
- calculer par les formules (4-25) et (4-27), les pertes de tension dans l'armature active et les déformations différées du béton pour

* Dans la solution théorique, l'expression de la valeur finale de la contrainte de l'acier (4-21) a pu être obtenue sans attribuer à la fonction de retard du béton $\phi_b(t)$ et à la fonction de relaxation de l'acier $\psi_a^*(t)$ une représentation analytique particulière. Il apparaît donc que cette valeur est indépendante de l'évolution des fonctions ϕ_b et ψ_a^* par conséquent des inverses des temps de retard et de relaxation.

les confronter aux résultats directs des essais de fluage et relaxation combinés. Les quelques exemples de comparaison donnés dans le tableau I et les figures 4-2 et 4-3 font apparaître la bonne concordance entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux.

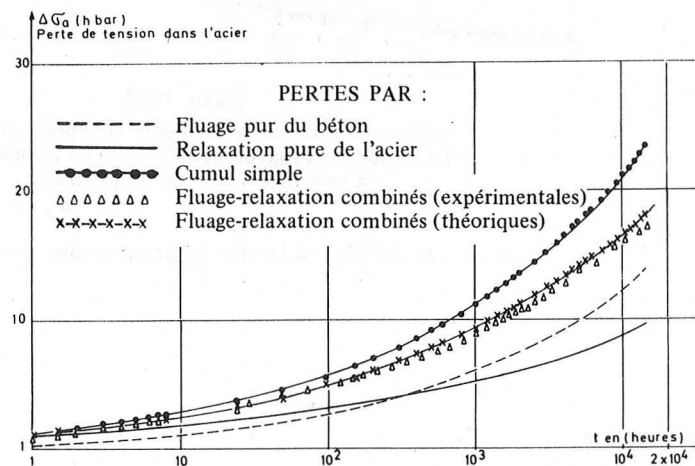


Figure IV.2.

Comparaison entre valeurs théoriques et valeurs expérimentales de la perte de tension différée des armatures actives, et mise en évidence de la sur-estimation résultant de la méthode du cumul des pertes élémentaires.

$$\omega_a = 3,38 \times 10^{-2}, \quad \omega_p = 0, \quad \sigma_a(0) = 98,8 \text{ hbar}, \quad \sigma_b(0) = 327 \text{ bar}$$

Age de la mise en précontrainte du béton : 6 mois

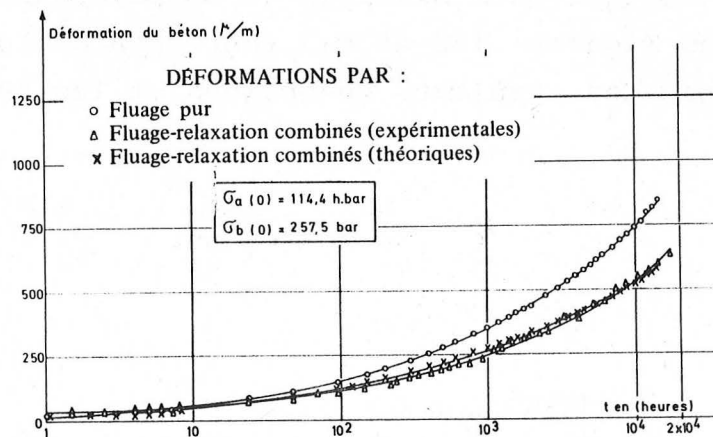


Figure IV-3

Déformations différées théoriques et expérimentales.
 La courbe de fluage du béton à contrainte constante
 est présentée à titre de comparaison :

$$\omega_a = 2,25 \times 10^{-2}, \omega_p = 0$$

Age du béton à la mise en précontrainte : 6 mois.

	Quantité des armatures passives $\omega_p = \frac{s_p}{s_b}$			6 ϕ 6		6 ϕ 10	
		(0 %)		(0,85 %)		(2,36 %)	
		Calcul	Exp.	Calcul	Exp.	Calcul	Exp.
Pertes de tension dans les armatures actives (en hbar)	Après 1 mois	20,75	19,05	19,70	18,30	18,30	17,80
	Après 3 mois	25,40	23,70	24,00	22,70	22,05	21,50
	Après 6 mois	28,45	26,85	26,60	25,95	24,40	24,00
Déformations différées du béton (en μ/m)	Après 1 mois	615	545	523	510	415	370
	Après 3 mois	850	760	710	715	550	515
	Après 6 mois	1020	915	840	865	635	635

TABLEAU I

Comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques

(Formules IV-25 et IV-27)

Contrainte initiale de l'acier actif : 115 hbar

Age du béton à la mise en précontrainte : 28 jours

Section de l'éprouvette : 200 cm²

IV.4. REDISTRIBUTION DES EFFORTS PAR FLUAGE DANS LES PONTS CONSTRUITS PAR ENCORBELLEMENT

IV.4.1. Introduction

Le problème de la redistribution des efforts dans les ponts construits par encorbellement a été abordé sur le plan expérimental par des mesures sur ouvrages, notamment des mesures de variation des réactions d'appui, de déplacements verticaux, du champ de température et du champ de déformation dans certaines sections transversales.

Deux ouvrages ont été instrumentés jusqu'à présent : le pont de Champigny-sur-Yonne (en 1970) et le pont de Tourville (en 1971).

Le pont de Champigny-sur-Yonne (ouvrage à 3 travées) a été coulé en place en deux parties et lancé suivant la technique de poussage. Après clavage, les deux culées ont été soulevées jusqu'à ce que leurs réactions atteignent 30 t chacune, ceci devant conduire, d'après la théorie du fluage linéaire, à enrayer tout effet d'adaptation du pont.

Les mesures ont permis, cependant, de faire les constatations importantes suivantes :

- les réactions d'appui peuvent varier, au cours d'une même journée, dans des proportions importantes (pouvant atteindre 20 % de la valeur due uniquement au poids propre) en fonction du cycle de température journalière,
- contrairement à toute attente, l'adaptation du pont est loin d'être négligeable.

Pour effectuer une analyse juste de l'adaptation constatée, il a fallu mettre au point une méthode de calcul permettant de séparer dans les variations mesurées des réactions d'appuis l'effet de la température de celui provenant uniquement de l'adaptation.

Le principe de la méthode de correction utilisée est développé au chapitre II. Le programme de la dite méthode est mise au point sur des ordinateurs de C.I.I. (Compagnie internationale pour l'In-

formatique), Série IRIS 80.

Les réactions d'appui du pont de Champigny-sur-Yonne ont subi, au bout de trois ans de mesure, et après correction des effets de température, une variation d'environ 20 % de leurs valeurs initiales ; l'état de stabilisation étant toujours loin d'être atteint.

Il nous semble que cette variation inattendue et importante provienne du fait que le soulèvement des culées a été calculé en considérant, tel qu'il est souvent d'usage dans les problèmes de redistribution des efforts par fluage des structures en béton précontraint, que la structure est composée d'un seul matériau homogène, qui est le béton, et en négligeant en conséquence le rôle des armatures (qu'elles soient actives ou passives). Cela revient à supposer que la précontrainte, considérée comme un système de forces extérieures, reste fixe dans le temps et donne lieu, même si elle est non concordante, à des réactions hyperstatiques invariables. (voir III.7.1.)

Ces considérations sont loin de représenter la réalité pour des raisons multiples. La première est le fait bien connu que la force de précontrainte dans une section de l'ouvrage subit, au cours du temps, des diminutions dans des proportions importantes pouvant atteindre sous certaines conditions 40 % de la force initialement appliquée. En plus, il faut souligner que le rôle de la décroissance de la précontrainte ne se limite pas à influencer uniquement l'intensité du fluage du béton par modification de sa sollicitation, mais aussi à contribuer d'une manière importante à la variation de l'équilibre interne des forces dans la section considérée, variation qui en elle-même n'est autre qu'une redistribution locale dont l'effet, au niveau de la section, s'ajoute à celui provenant de la redistribution globale de la structure caractérisée par les variations des liaisons surabondantes (réactions d'appui ou moments hyperstatiques).

Ces considérations incitent à penser qu'il est nécessaire, dans l'étude des problèmes d'adaptation des structures en béton précontraint, de prendre en compte le fait que dans ces structures,

le béton et les armatures, associés par l'intermédiaire de l'adhérence et des ancrages, forment un système en auto-équilibre visco-élastique ; ce qui signifie que toute variation de contrainte ou de déformation de l'un des deux matériaux se répercute instantanément sur l'autre et crée de nouvelles conditions d'équilibre et d'évolution de l'ensemble du système.

IV.4.2. Méthode de calcul proposée

Dans un pont en béton précontraint, et compte tenu de l'adhérence entre les armatures et le béton et de l'effet des ancrages, chaque section de l'ouvrage peut être considérée, entre deux instants quelconques, comme un système en équilibre visco-élastique évoluant librement tel que celui étudié dans le paragraphe IV.3.

pour déterminer l'évolution d'une section, nous allons superposer les effets des efforts qui lui sont appliqués successivement.

Chaque section subit deux sortes de sollicitations distinctes :

- la précontrainte initiale,
- des moments extérieurs provenant des causes multiples : clavage, adaptation, pose successive de voussoirs, etc.

L'effet de la précontrainte est celui étudié dans le paragraphe IV.3. D'après les résultats de ce paragraphe (Formules 4-23 à 4-27), la déformation différée du béton au niveau des armatures actives, dans le cas de la précontrainte intégrale (sans armatures passives : $K_p = 0$), peut être exprimée par la relation suivante :

$$\Delta \varepsilon_b^F = \frac{K_a \sigma_a(0)}{E_a} \cdot \frac{\varphi \cdots (1 \cdots \beta) \psi (1 + \varphi)}{1 + K_a(1 + \varphi)(1 \cdots \psi)} + \frac{\varepsilon_r}{1 + K_a(1 + \varphi)(1 \cdots \psi)} \quad \text{IV-30}$$

avec :

? coefficient de fluage tel qu'il est défini dans le règlement français :

$$\varphi(t, t_0) = Z k_1(t_0) k_2(t \cdots t_0)$$

Z Coefficient représentant globalement la composition du béton (β_r), la forme géométrique de la section (α_f) et les conditions climatiques (ψ_f) :

$$Z = \beta_f \cdot \alpha_f \cdot \psi_f$$

$k_1(t_0)$ représente le degré du vieillissement du béton à l'âge t_0 de l'application de la sollicitation.

$k_2(t - t_0)$ traduit l'effet de la durée de la charge supportée par le béton.

$\beta = \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_a(0)}$ rapport entre le seuil de visco-élasticité σ_{ca} et la tension initiale $\sigma_a(0)$ de l'acier actif.

ε_r retrait libre du béton à partir de la mise en précontrainte.

ψ Coefficient de relaxation des armatures actives :

$$\psi = \frac{\Delta\sigma_R}{\sigma_a(0) - \sigma_{ca}}$$

$\Delta\sigma_R$ étant la relaxation correspondant à la tension initiale $\sigma_a(0)$.

K_a défini dans le paragraphe 4-3.

Pour étudier l'effet d'un moment extérieur M venant se superposer à celui de la précontrainte, il faut reconstituer le système d'équations de façon à prendre en compte les nouvelles conditions aux limites :

$$\delta\varepsilon_b(t) = \varphi_b(0) \delta\sigma_b(t) - \int_0^t \delta\sigma_b(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \varphi_b(t-\tau) d\tau \quad \text{IV-31}$$

$$\delta\sigma_a(t) = \psi_a^*(0) \delta\varepsilon_a(t) - \int_0^t \delta\varepsilon_a(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \psi_a^*(t-\tau) d\tau \quad \text{IV-32}$$

$$\delta \varepsilon_b(t) = \delta \varepsilon_a(t) \quad \text{IV-33}$$

$$\delta \sigma_b(t) - \delta \sigma_a(t) \omega_a - M(t) \frac{e}{I_b} = 0 \quad \text{IV-34}$$

Les quatre équations ci-dessus constituent un système intégral-différentiel, les inconnues étant la variation de déformation et de contrainte.

En utilisant la transformation de Laplace, ce système d'équations s'écrit :

$$\delta \varepsilon_b(P) = P \delta \sigma_b(P) \bar{\Phi}_b(P) \quad \text{IV-35}$$

$$\delta \sigma_a(P) = P \delta \varepsilon_a(P) \bar{\Psi}_a^*(P) \quad \text{IV-36}$$

$$\delta \varepsilon_b(P) = \delta \varepsilon_a(P) \quad \text{IV-37}$$

$$\delta \sigma_b(P) + \delta \sigma_a(P) \cdot \omega_a + \frac{1}{P} \frac{M \cdot e}{I_b} = 0 \quad \text{IV-38}$$

δ_{ε_b} , δ_{ε_a} , δ_{σ_a} et δ_{σ_b} étant les variations des déformations et des contraintes des deux matériaux dues à l'application du moment M. Un calcul analogue à celui présenté dans le paragraphe IV.3. conduit alors à exprimer la déformation différée $\Delta \varepsilon_b^M$ au niveau des armatures actives due au moment M par la relation :

$$\Delta \varepsilon_b^M = \frac{1}{E_b} \cdot \frac{M \cdot e}{I_b} \cdot \frac{\varphi - K_a(1 + \varphi) \psi}{1 + K_a(1 + \varphi)(1 - \psi)} \cdot \frac{1}{1 + K_a} \quad \text{IV-39}$$

La déformation différée totale s'obtient en superposant à l'effet de la précontrainte les effets provenant des moments que la section subit successivement :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_b^x &= \Delta \varepsilon_b^0(x) [A(x, t_i, t_0) - A(x, t_c, t_0)] \\ &+ [\varepsilon_r(t_i, t_0) - \varepsilon_r(t_c, t_0)] [B(x, t_i, t_0) - B(x, t_c, t_0)] \\ &+ a(x) \sum_{k=1}^{k=i-1} [M_0(x) \cdot C(x, t_i, t_c) + \Delta M_k \cdot C(x, t_i, t_k)] \end{aligned} \quad \text{IV-40}$$

avec :

t_0 temps de la mise en précontrainte de la section X

t_c	temps de clavage
t_i	temps au ième intervalle
M_o	moment total de la section x tout de suite après clavage.
ΔM_k	moments successifs de redistribution

$$\Delta \varepsilon_b^0 = \frac{K_a \sigma_a(0)}{E_a}; \quad a = \frac{e}{E_b I_b}$$

$$A = \frac{\varphi - (1 - \beta) \psi (1 + \varphi)}{1 + K_a (1 + \varphi) (1 - \psi)}$$

$$B = \frac{1}{1 + K_a (1 + \varphi) (1 - \psi)}$$

$$C = \frac{\varphi - K_a (1 + \varphi) (\psi)}{1 + K_a (1 + \varphi) (1 - \psi)} \cdot \frac{1}{1 + K_a}$$

L'utilisation de la formule 4-40 pour calculer l'adaptation s'effectue suivant les deux étapes suivantes :

- jusqu'à l'instant de clavage en tenant compte de l'effet de la précontrainte initiale et des moments extérieurs provenant du mode de construction de l'ouvrage (pose des voussoirs successifs, etc....). Les calculs dans cette première phase permettent d'estimer l'évolution des flèches en cours de construction et l'état réel des efforts dans l'ouvrage avant clavage,
- à partir du clavage, le temps est décomposé en intervalles successifs. On calcule pour chacun de ces intervalles à partir de la formule 4-40 les rotations différées aux appuis des travées de l'ouvrage rendu isostatique :

$$\text{rotation gauche} = \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i} - 1 \right) \frac{\Delta \varepsilon_b^x}{e(x)} dx$$

$$\text{Rotation droite} = \int_0^{l_i} \frac{x \Delta \epsilon_b}{l_i e(x)} dx$$

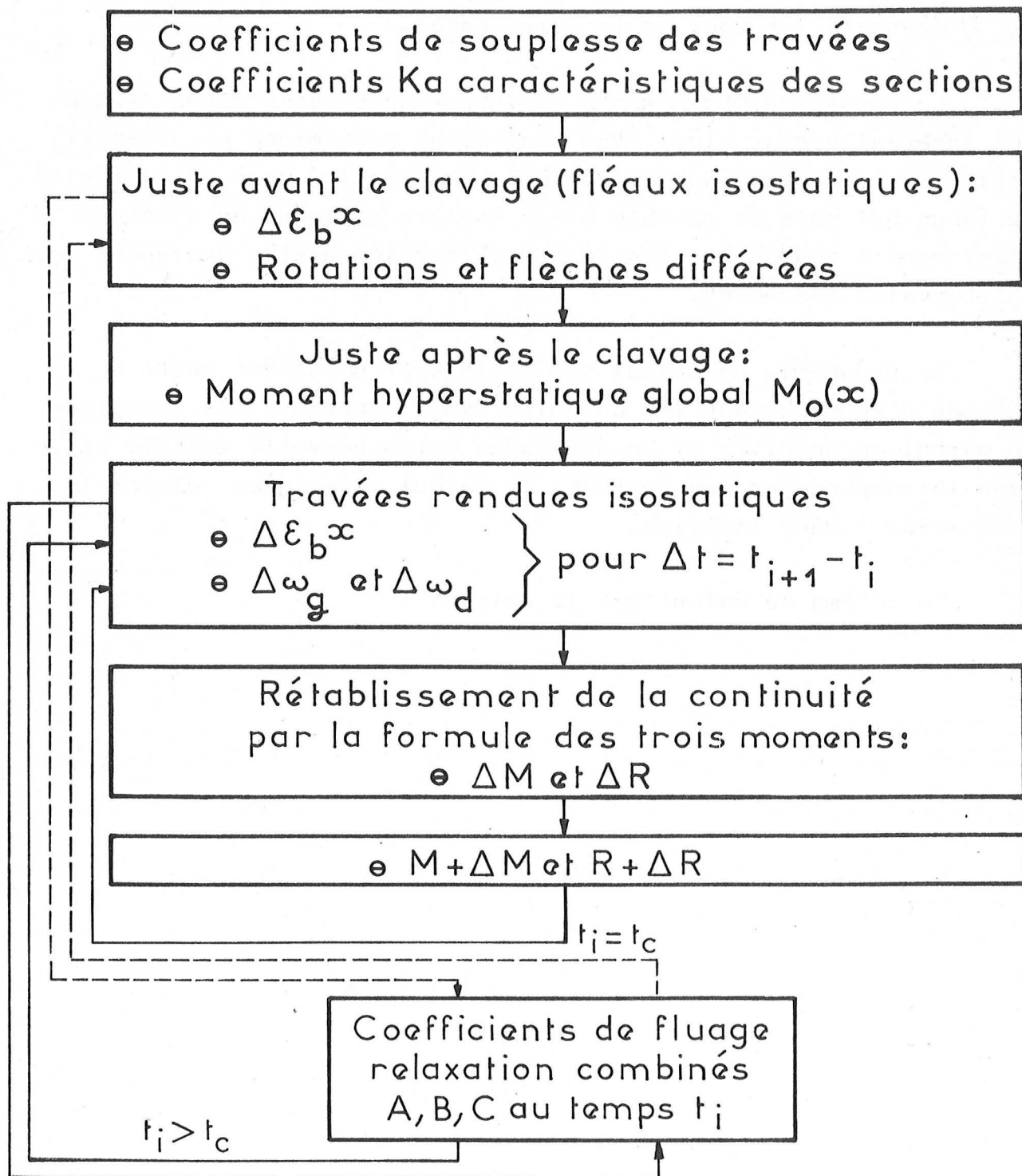
l_i étant la longueur de la i ème travée.

La variation des moments hyperstatiques qui s'effectue dans cet intervalle peut alors être facilement déterminée par l'application de l'équation des 3 moments. L'adaptation dans l'intervalle de temps qui suit se calcule d'une manière analogue en ajoutant simplement à chaque section le moment supplémentaire provenant de l'intervalle précédent.

Un programme de calcul sur ordinateur utilisant cette méthode d'approche est mis au point. Nous donnerons des exemples de calcul au Chapitre VI en utilisant cette nouvelle méthode et nous la comparerons aux méthodes de calcul classiques suivant la théorie du fluage linéaire.

Le schéma de calcul est le suivant :

SCHEMA DE CALCUL



RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES DU CHAPITRE IV

- IV.1. ATALLAH R.,
Contribution à l'étude des pertes de précontrainte par fluage - relaxation combinée dans les éléments en béton précontraint.
Thèse présentée à la faculté des Sciences de l'Université de Paris 1971.
- IV.2. ATALLAH R., BRACHET M., DARPAS G.,
Contribution à l'estimation des pertes de précontrainte et des déformations différées des structures en béton précontraint.
VII^e Congrès de la Fédération Internationale de la précontrainte - New-York - Mai 1974.
- IV.3. LAU M.Y., ATALLAH R.,
Redistribution des efforts par fluage dans les ponts construits par encorbellement.
Journées de l'Association française des ponts et Charpentes, Avril 1974 et VII^e Congrès de la Fédération Internationale de la précontrainte, New-York - Mai 1974.
- IV.4. LAU M.Y., LEGER Ph., DIRUY M.,
Constatations à long terme sur un ouvrage en béton précontraint.
Pont de Champigny-sur-Yonne.
Rapport du Comité technique de l'Association française des Ponts et Charpentes 1972.
- IV.5. Circulaire n° 44 du 12 Août 1965 portant approbation d'une instruction provisoire relative à l'emploi du béton précontraint dans les ouvrages dépendant du Ministère des Travaux Publics et des Transports.
- IV.6. Recommandations de l'Association Scientifique de la précontrainte pour le calcul et l'exécution des ouvrages précontraints. Juillet 1965.
- IV.7. Recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton.
Comité Européen du béton - Fédération internationale de la Précontrainte.
Sixième congrès de la F.I.P. Prague 1970.

- IV.8. Rapport d'association internationale des Ponts et Charpentes
Neuvième Congrès - Amsterdam - May 1972.
- IV.9. Circulaire n° 73-153 du 13 Août 1973 relative à l'emploi du
béton précontraint dans les ouvrages relevant du Ministère de
l'Aménagement du Territoire, de l'Équipement, du Logement
et du Tourisme.

CHAPITRE V

INSTRUMENTS DE MESURE ET CORPS D'ÉPREUVE

SOMMAIRE

V.1.	INTRODUCTION	113
V.2.	CARACTERISTIQUES PRINCIPALES DU PONT DE CHAMPIGNY- SUR-YONNE ET DU PONT DE TOURVILLE-LA-RIVIERE	114
V.3.	DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX MIS EN PLACE	118
3.1.	Mesure des réactions d'appui	118
3.2.	Mesure des variations de flèches	121
3.3.	Mesures extensométriques	122
3.4.	Mesures de température	123

V - LES INSTRUMENTS DE MESURE

V.1. INTRODUCTION

L'étude expérimentale du comportement à long terme des ouvrages présente nombre de difficultés, eu égard aux techniques délicates de mesures in situ qu'elle implique. En ce qui concerne les ouvrages hyperstatiques, la mesure permanente des réactions d'appuis constitue un puissant moyen d'étude de la redistribution des contraintes due aux phénomènes à long terme imputables à la nature des matériaux constitutants, à leur rhéologie (retrait et fluage du béton, relaxation des câbles de précontrainte) ainsi qu'aux variations climatiques environnantes (hygrométrie, température, ensoleillement).

De telles mesures nécessitent des capteurs devant répondre à des critères très particuliers :

- grande sensibilité, les variations de force à mesurer étant parfois très faibles par rapport à la charge permanente,
- absence totale de dérive, l'évolution des réactions devant pouvoir être suivie à très long terme,
- insensibilité aux sollicitations diverses d'ordre technique ou mécanique (mouvements relatifs tablier-appui).

Les dynamomètres à déformation élastique présentent une dérive due au fluage du corps d'épreuve qui ne peut être éliminée que par une reprise périodique du zéro du capteur. Cette opération dans le cas des appuis de pont nécessite le déchargement du dynamomètre par un dispositif spécial reprenant les efforts. L'influence des sollicitations perturbatrices, mécaniques ou thermiques, est également difficile à éliminer d'où la mise au point d'un nouveau

procédé qui utilise une cellule de charge ayant les qualités requises.

Il est évident que des mesures de variations de flèches et des mesures par extensométrie de la déformation des fibres dans diverses sections des ponts hyperstatiques sont des méthodes efficaces de recoupement des résultats obtenus par la pesée des réactions hyperstatiques. Etant donné que la réaction hyperstatique due au gradient de température est très importante, il est nécessaire d'équiper une série de sections en sondes de température, pour éliminer l'effet produit par le gradient thermique.

V.2. CARACTERISTIQUES PRINCIPALES DU PONT DE CHAMPIGNY-SUR-YONNE ET DU PONT DE TOURVILLE-LA-RIVIERE SUR LA SEINE

V.2.1. Caractéristiques principales du pont de Champigny-sur-Yonne

Le pont de Champigny-sur-Yonne est un ouvrage en béton précontraint comportant 3 travées de 35, 70, 35 mètres, avec 2 piles en rivière et 2 culées. (figure V.1, photo V.1)

Le tablier est un caisson de hauteur 3,35 m constante sur toute la longueur de l'ouvrage. Il comprend 2 voies de 3,5 m et 2 trottoirs de 1,5 m sur encorbellements.

L'épaisseur des âmes et du hourdis inférieur est variable.

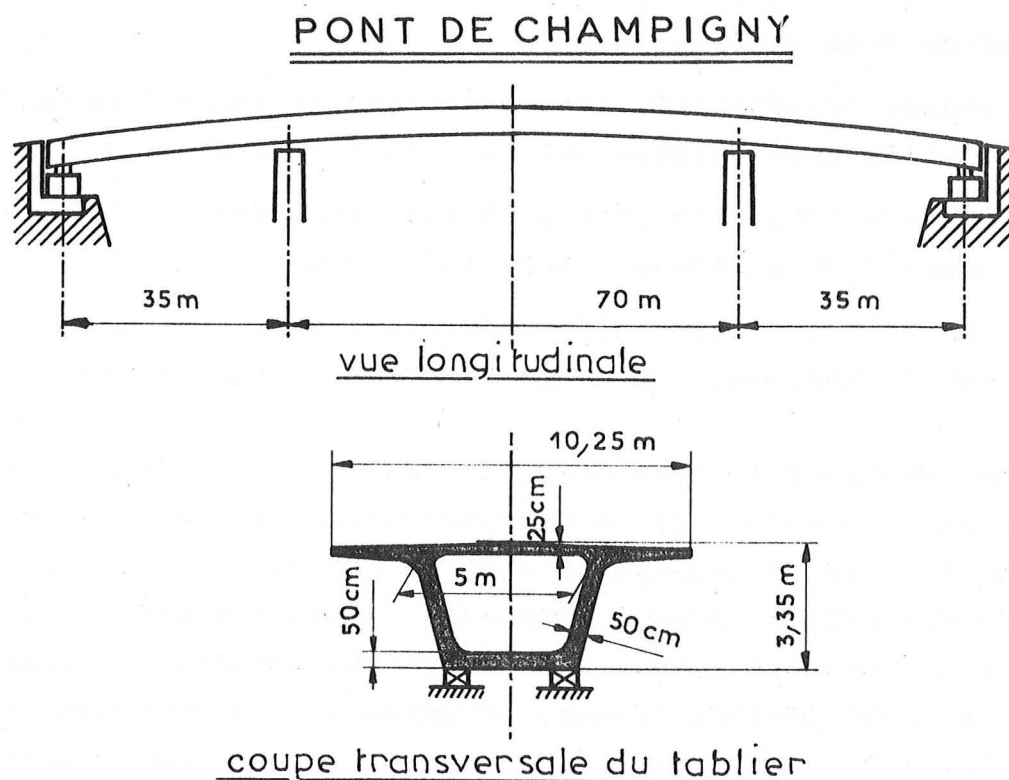


FIG. V-1

Le principe de construction est le suivant :

20 voussoirs de 7 mètres de longueur sont coulés par moitié sur chacune des 2 rives. Après précontrainte partielle, chaque moitié du tablier ainsi constituée est poussée de la berge et glisse sur les têtes de piles préalablement construites. Le clavage est effectué au milieu de la travée centrale. On procède alors à une dénivellation d'appuis des 2 culées de telle manière que la réaction sur chacune d'elles atteigne 30 t. La figure (V-2) indique les dates de construction des différents éléments.

On peut retenir les dates suivantes :

24/07/1969 : début de coulage des voussoirs.

20-21-22/01/1970 : lancement du premier demi tablier rive droite.

23-24-25/02/1970 : lancement du second demi tablier rive gauche.

20-23/03/1970 : clavage dans l'axe central.

début avril 1970 : dénivellation d'appuis de 5 cm.

Avril, Mai, début juin 1970 : Mise en place des superstructures et du revêtement.

15/06/1970 : essais de réception et mise en service.

16/06/1970 : début de l'étude du comportement à long terme de l'ouvrage.

V.2.2. Caractéristiques principales du pont de Tourville-la-Rivière sur la Seine

Le pont de Tourville sur la Seine est un ouvrage en béton précontraint à 3 travées de 59, 90 et 59 mètres, avec 2 piles en rivière et deux culées (figure V-3, photo V-2).

Le tablier en béton précontraint est constitué par un caisson de hauteur variable (de 2 mètres à la clé et au voisinage des culées, à 4,80 m au droit des piles). L'épaisseur du hourdis inférieur varie de 0,14 m à la clé à 0,5 m au droit des piles. L'épaisseur du hourdis supérieur est constante suivant le profil en long. Les trottoirs sont constitués d'éléments préfabriqués en béton armé fixés par boulonnage aux extrémités des encorbellements. Le tablier

comporte des diaphragmes intérieurs jouant le rôle de raidisseurs, au droit de chaque appui.

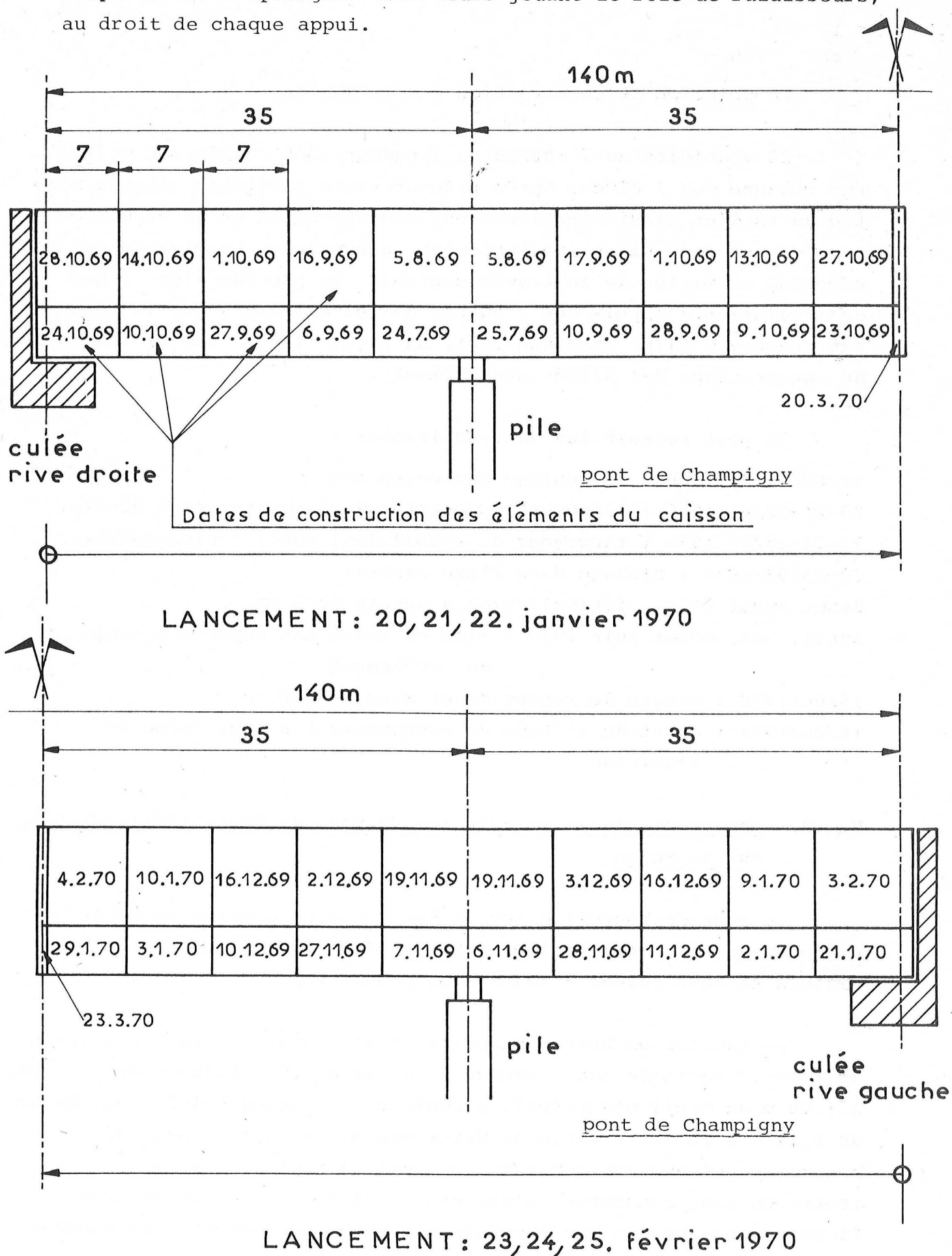
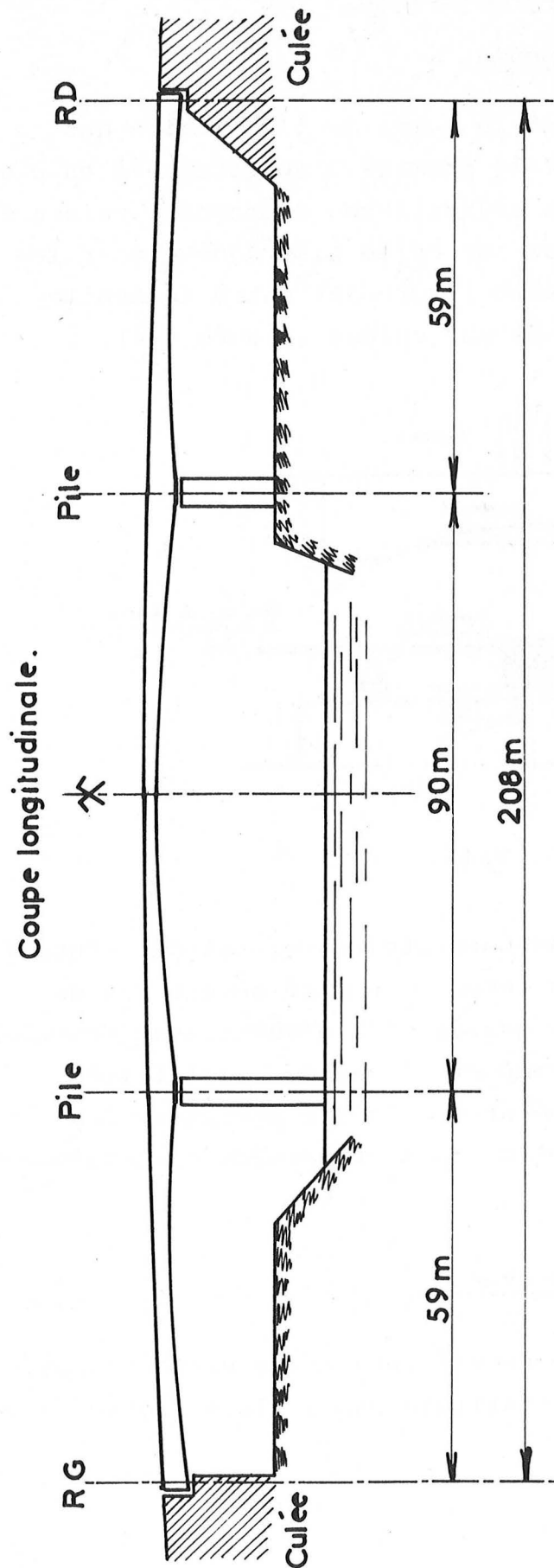


FIG. V-2



Section centrale
Coupe transversale

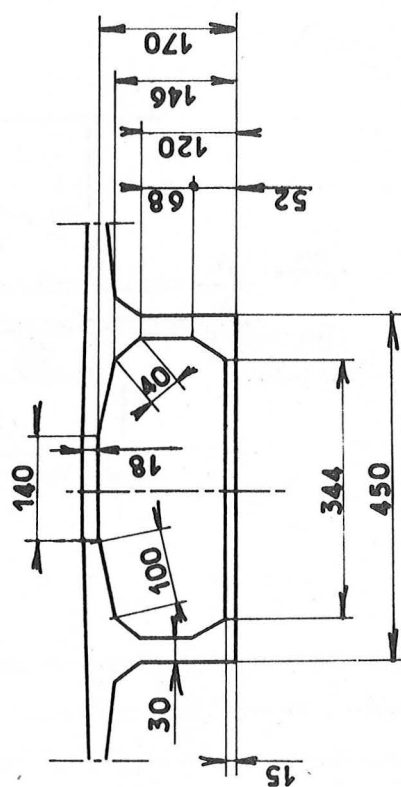


FIG. V-3

PONT DE TOURVILLE

V.3. DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX MIS EN PLACE

V.3.1. Mesure des réactions d'appuis

L'objectif principal étant le suivi de l'évolution des réactions d'appuis dans le temps, le premier dispositif mis en place est un ensemble de 4 dynamomètres hydrauliques disposés à raison de deux sur culée rive droite et deux sur culée rive gauche pour les ponts (photo V-3). Ces "pesons" sont interposés entre le tablier et les appuis néoprène-téflon disposés sur culées (figure V-4).

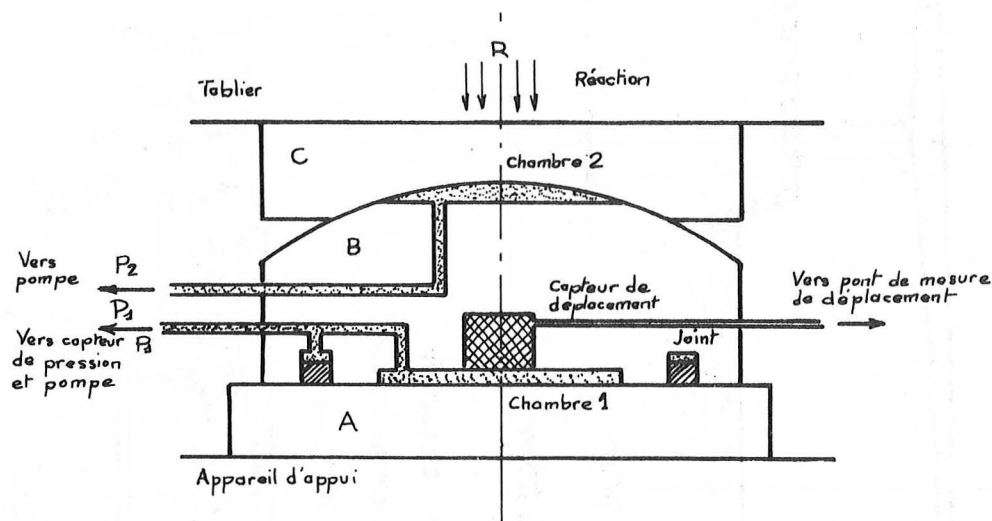


FIG. V-4

Ils ont été spécialement conçus au Laboratoire Central des Ponts & Chaussées pour des mesures à long terme et ne présentent pas de dérive. Leur sensibilité est très grande. Ils n'autorisent toutefois que des mesures discrètes et ne comportent pas de possibilités d'enregistrement. En raison d'impératifs d'ordre pratique, les mesures sur les 4 pesons mis en place sont effectuées successivement et non simultanément.

Principe de la cellule de charge

La cellule de charge directement interposée entre l'appui de l'ouvrage et le tablier, est constituée par 3 blocs rigides superposés (voir fig. V-4 ci-dessus).

Ces blocs sont en contact par des faces planes rectifiées (A et B) ou par des surfaces sphériques (B et C). Deux chambres ménagées dans B peuvent être alimentées indépendamment sous pression d'huile au moyen d'une petite pompe à main.

La pression dans la chambre I, développe à partir d'une certaine valeur une force qui équilibre la réaction d'appui et entraîne le soulèvement de B. Le déplacement relatif "d" de A et B, mesuré par un capteur incorporé à la cellule, est fonction de la pression hydraulique mesurée par un capteur indépendant de la cellule. Il

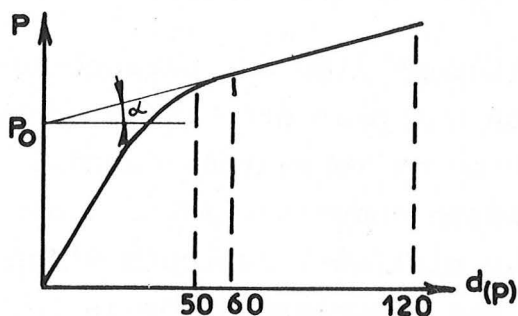


FIG. V-5 - $p = f(d)$

faut atteindre un écartement de 50 à 60 μ pour éliminer tout contact entre B et C et obtenir, pour des déplacements inférieurs à 120 μ , une variation linéaire de p en fonction de d . La pente (α) de cette droite, traduisant la rigidité de l'ouvrage, est obtenue par des mesures de p de 10 μ en 10 μ . La pression p_0 pour $d = 0$, obtenue par extrapolation, fournit d'après la

courbe d'étalonnage la valeur de la réaction d'appui.

Le fonctionnement correct du dynamomètre n'est assuré que si la réaction d'appui R est centrée sur la chambre 1 sans aucun moment entre les blocs A et B. Dans ce but, avant toute mesure, la chambre 2 est mise sous pression d'huile pour permettre à l'élément C de rotuler sans frottement sur coussin d'huile.

V.3.1.1. Caractéristiques métrologiques

La force maximum mesurable avec une cellule de charge est fonction de la pression admissible dans la chambre et de sa surface.

La pression normale de service est de 250 bars et peut atteindre exceptionnellement 400 bars, ce qui permet de réaliser des cellules pour des forces de plusieurs centaines de tonnes.

Les erreurs de linéarité dues à la cellule de charge proviennent des variations possibles de la surface efficace de la chambre 1 ; le montage particulier du joint d'étanchéité permet de limiter cette erreur à 0,2 % pour des variations de pression comprises entre 2 bars et 400 bars.

La fidélité est très bonne et le pouvoir de résolution inférieur à 5.10^{-4} de la force mesurée. La cellule ne présente aucune hystérésis mesurable (vérifié lors d'étalonnage au 1/10000^e près en laboratoire sur des cellules de force 100 KN).

Des variations de température entraînent des modifications de la section efficace de la chambre de l'ordre de 0,1 % pour $\Delta T = 40^{\circ}C$.

La précision des mesures est étroitement liée aux caractéristiques de la chaîne de mesure de pression qui peut être réétalonnée fréquemment. Pour des domaines de variation de force très étendus pouvant entraîner des variations de pression comprises entre 1 bar et 400 bars, il est nécessaire d'utiliser plusieurs capteurs d'étendues de mesure différentes. Dans le cas des réactions d'appui les variations excèdent rarement ± 15 % et la pression nominale du capteur est donnée en conséquence.

Ce procédé peut fournir la valeur des réactions d'appui avec une précision inférieure à $\pm 0,2$ % à condition de disposer des moyens d'étalonnage en force.

V.3.1.2. Utilisation pratique

Pour effectuer les mesures deux opérateurs sont nécessaires, l'un pour imposer la pression d'huile en fonction des déplacements désirés, l'autre pour mesurer cette pression grâce à un capteur à jauges de déformation et un pont de mesure statique de haute précision.

Pour les mesures de réactions d'appui, où chaque extrémité de travée est équipée de deux cellules de charge, on relève successivement les valeurs. Dans ces conditions la pente de la partie linéaire de la courbe $p = f(d)$ est surtout liée à la rigidité de torsion de

l'ouvrage, la rigidité de flexion intervenant très peu.

V.3.2. Mesure des variations de flèches

Pour le pont de Champigny-sur-Yonne :

à l'intérieur du caisson sont installés des niveaux Peltier de type simplifié et comportant :

a) sur culée rive droite, 2 réservoirs d'alimentation en eau additionnée d'antigel et d'un colorant.

b) sur les âmes amont et aval deux tubes horizontaux accrochés à la paroi et reliés respectivement aux 2 réservoirs. Ces tubes ont la longueur de l'ouvrage, ils sont raccordés à des tubes verticaux transparents gradués disposés aux appuis et en milieu de travée. Le niveau de l'eau est lu sur ces tubes (précision de lecture de l'ordre du demi millimètre).

Il est théoriquement possible avec un tel dispositif de mesurer des variations de flèche au millimètre près. Aucun dispositif n'est prévu pour mesurer des mouvements absolus des piles et des culées. Les mesures sont doublées par nivellements optiques. Nous avons équipé 7 positions de mesures (amont et aval) sur les 2 faces intérieures des âmes du caisson et 2 positions de mesures sur la culée rive droite et rive gauche.

Pour le pont de Tourville :

Le repère principal à l'altitude 12.121 N.G.F., situé dans l'emprise S.N.C.F. du côté rive droite et en dehors de la zone des travaux routiers, est invariable.

Les repères dits de "fluage" ont été placés tous les 15 m. environ à l'intérieur des voussoirs. Il y a 17 points de mesures à l'intérieur du caisson et 18 points à l'extérieur du caisson, soit sur les culées, soit sur les piles.

V.3.3. Mesures extensométriques

A l'intérieur du caisson, à 11 mètres de part et d'autre de l'axe central de l'ouvrage sont équipées deux sections de mesures extensométriques (Section I côté rive droite, Section II côté rive gauche).

Chaque section comporte 5 points de mesure équipés pour recevoir des extensomètres à capteurs type L.C.P.C. et des extensomètres à billes type PFENDER disposés longitudinalement.

V.3.3.1. Extensomètres à transformateur différentiel

En chaque point, deux ancrages scellés dans l'âme du caisson sont destinés à la mise en place d'un extensomètre à transformateur différentiel à version amovible à lecture directe sur pont de mesure digital. Un seul extensomètre est utilisé. Il est placé sur les couples d'ancrages successifs et les lectures effectuées sont comparées à celles obtenues à l'aide d'un barreau témoin en invar supérieur (dilatation $< 10^{-6}$) équipé du même type d'ancrages.

On peut obtenir en chaque point la différence de la longueur de base au point mesuré et sur le barreau témoin (cette dernière étant constante).

Soit Δl cette différence. Elle varie dans le temps par suite des déformations de l'ouvrage dues à l'effet combiné retrait-fluage-relaxation du béton et des câbles mais aussi à cause des variations thermohygrométriques ambiantes.

Des mesures périodiques de ces variations sont effectuées.

Les extensomètres à transformateur différentiel utilisés ont une longueur de base de 200 millimètres et permettent de mesurer des déformations absolues de 200 microns à 0,2 microns près, soit $\frac{\Delta l}{l} = 10^{-6}$.

V.3.3.2. Extensomètres à billes

De part et d'autre de chaque extensomètre à transformateur

différentiel sont implantées des bases d'extensomètres à billes (type : PFENDER, marque : MOHR & FEDERHAFF - base de mesure 100 mm). Le principe de mesure est identique à celui de l'extensomètre à transformateur différentiel (comparaison de la longueur de base mesurée et de celle d'un barreau témoin). La précision de cet appareil est de l'ordre de ± 1 micron, soit $\frac{\Delta l}{l} = 10^{-5}$ (encore cette précision n'est-elle obtenue que dans les cas les plus favorables et en manipulant l'appareil avec beaucoup de soin).

Il a été choisi en raison de son utilisation très commode, ceci malgré sa médiocre sensibilité. Pour le pont de Tourville, 2 sections (A_E et B_E) sont équipées pour des mesures extensométriques. A_E est la section distante de 106,73 m de l'appui R.D. B_E est la section distante de 35,50 m de l'appui rive droite.

V.3.4. Mesures de températures

Pour le pont de Champigny

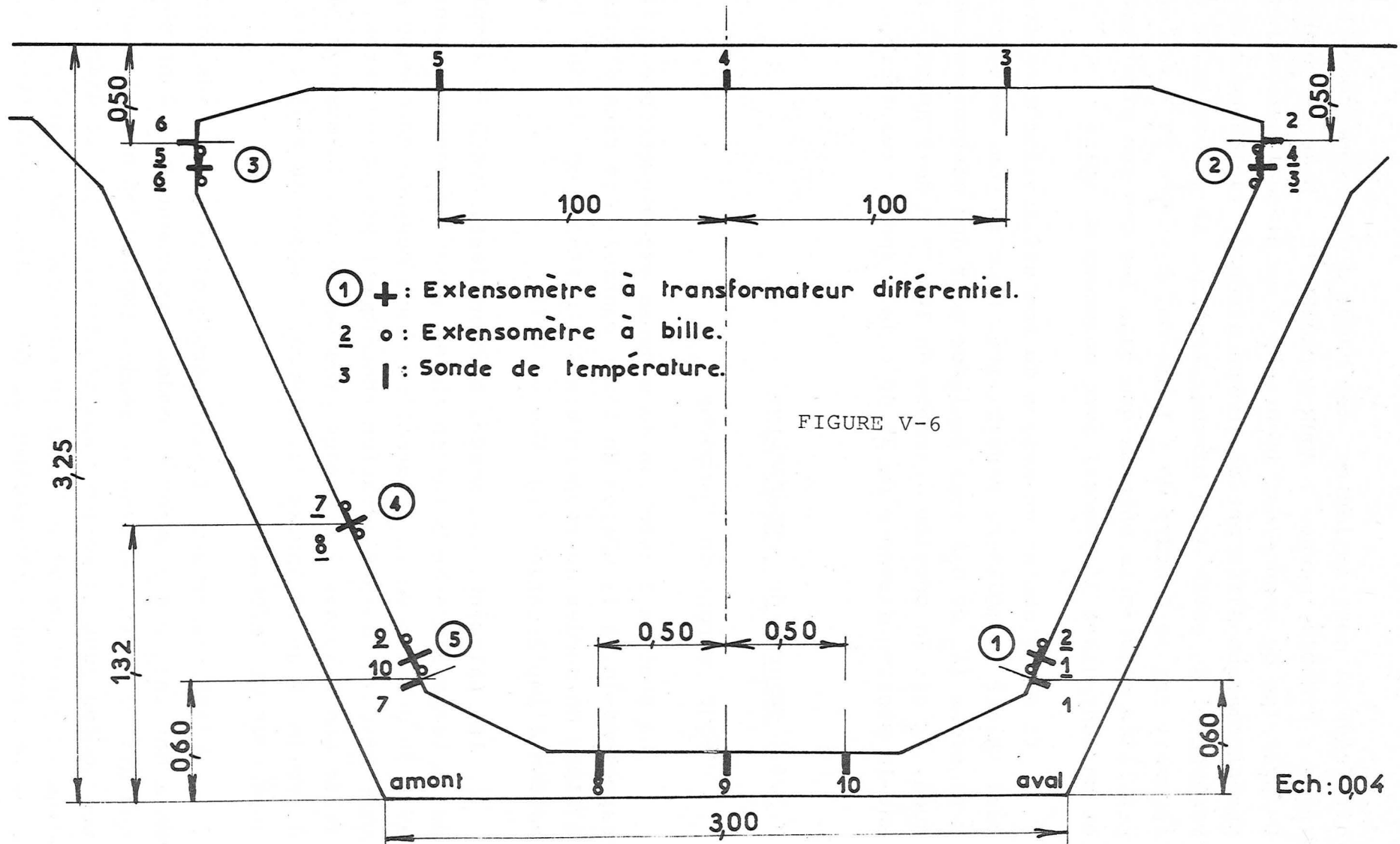
La section I (section de mesures extensométriques située, rappelons-le, à 11 mètres de l'axe central côté rive droite) est équipée de sondes de température à résistance de platine (voir schéma d'implantation fig. V-6 et V-7).

Initialement, ces sondes étaient destinées à la simple mesure de la température du béton en chaque point de mesure extensométrique, afin de déduire de la déformation brute mesurée en chaque point, la part revenant à la dilatation thermique libre de ce béton. Il n'y avait que 6 sondes : 4 sondes près des points de mesures situés à proximité des 4 angles du caisson, 1 sonde au milieu des hourdis supérieur et inférieur.

L'importance des effets thermiques constatés les premiers mois ont incité à ajouter 6 sondes supplémentaires dans chaque hourdis, d'où le total de 16 sondes implantées dans la section I. Les sondes sont disposées dans des trous de faible diamètre percés dans la paroi (de l'intérieur du caisson). Leur partie active est à 10 cm environ à l'intérieur du béton. Leur sensibilité est de l'ordre de 0,1 degré. Une dix-septième sonde mesure la température

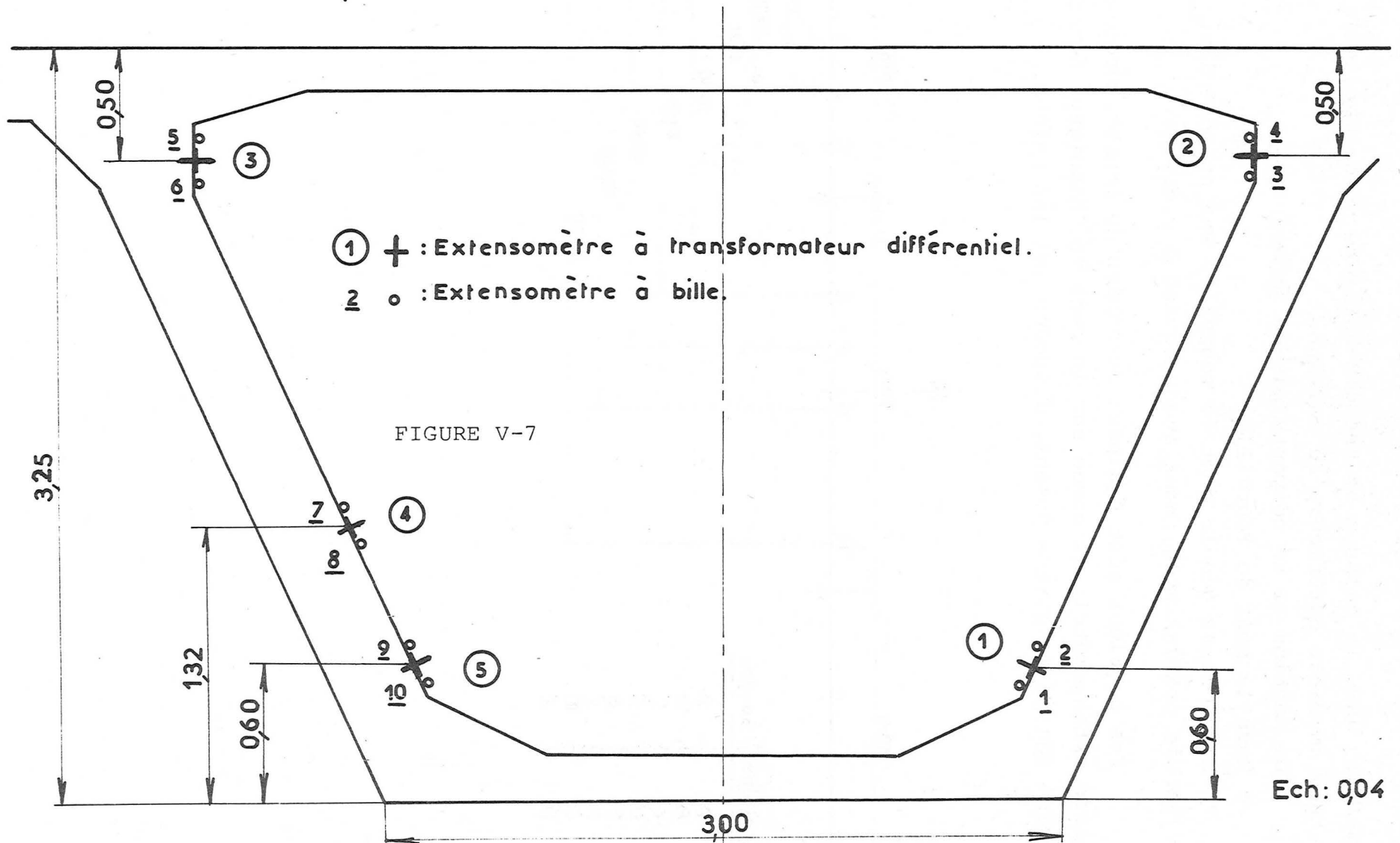
Pont de Champigny-sur-Yonne

Implantation des sondes de température et des extensomètres dans la section I



Pont de Champigny-sur-Yonne.

Implantation des extensomètres dans la section II



ambiante dans le caisson et une dix-huitième sonde mesure la température ambiante extérieure au caisson.

La section II ne comporte pas de sondes.

* Pour le pont de Tourville

Etant donné que le pont de Tourville est un pont dont le moment d'inertie est variable, nous avons équipé 8 sections.

Ces sections sont équipées de sondes de températures et de bases extensométriques comme sur le pont de Champigny. Le pont est aussi équipé de quatre pesons, disposés sur les culées.

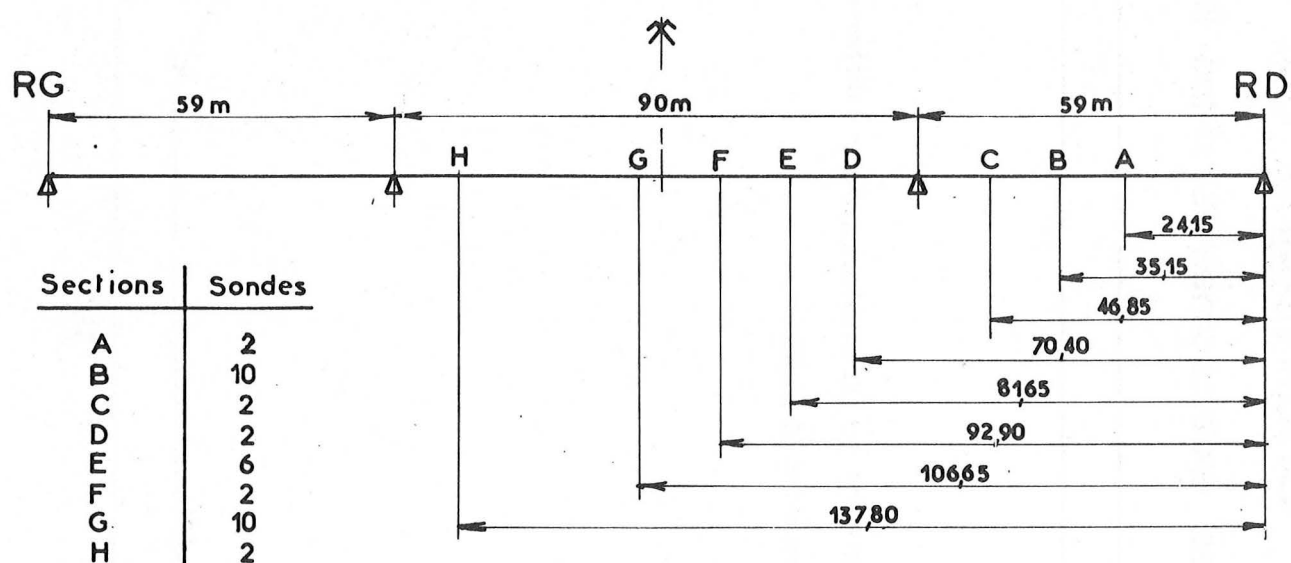




Photo V-1 - Pont de Champigny.



Photo V-2 - Pont de Tourville.

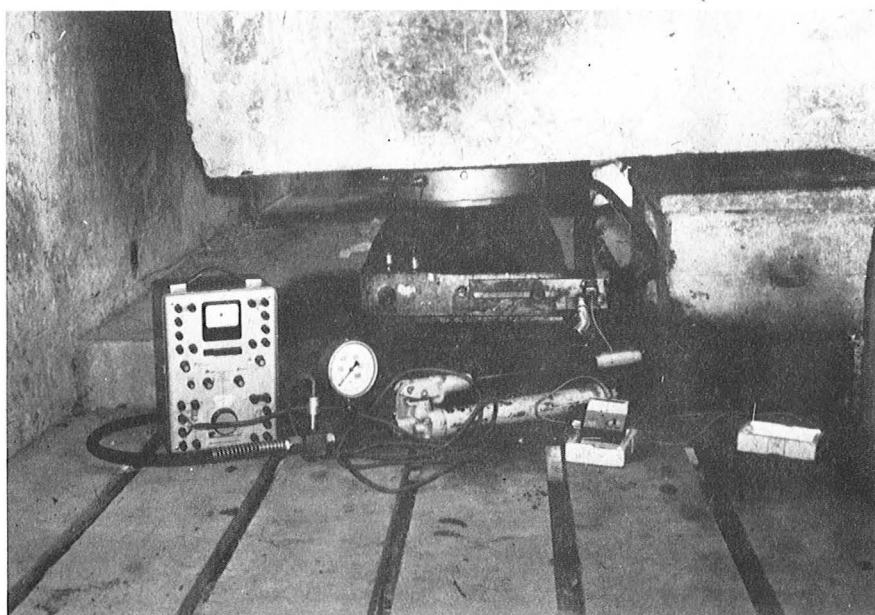


Photo V-3 - Peson.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES DU CHAPITRE V

- V.1. BRETONNIERE S., DIRUY M.,
Mesure des variations de réactions d'appuis d'ouvrages
hyperstatiques en béton précontraint ou mixtes.
Neuvième Congrès association internationale des Ponts et
Charpentes - Amsterdam May 1972
- V.2. DIRUY M.,
Pont de Champigny-sur-Yonne - Compte-rendu partiel de recher-
ches relatif aux mesures effectuées de juin 1970 à Décembre
1971.
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Paris France.
- V.3. LAU M.Y.
Compte-rendu des essais du pont de Tourville-La-Rivière sur
la Seine.
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Paris France.

CHAPITRE VI

RÉSULTATS OBTENUS ET INTERPRÉTATION

SOMMAIRE

VI.1.	DIMENSIONNEMENT D'UNE POUTRE A MOMENT D'INERTIE CONSTANT A DEUX TRAVEES CONTINUES, COULEE SUR CINTRE ET DECOFFREE EN UNE SEULE PHASE	132
1.1.	Recherche de la ligne de précontrainte	132
1.2.	Calcul de la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la théorie du fluage linéaire du béton et de la re- laxation des aciers combinés	148
1.3.	Résultats obtenus	151
1.4.	Etude de la sensibilité des divers facteurs ...	157
VI.2.	PONT DE CHAMPIGNY-SUR-YONNE	165
2.1.	Correction de la température	165
2.2.	Calcul de la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la théorie du fluage linéaire du béton	168
2.3.	Calcul de la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la théorie du fluage linéaire du béton et de la relaxation des aciers combinés	175
2.4.	Réactions d'appuis mesurées et comparaison avec les résultats de calcul	190
2.5.	Flèches et déformations mesurées et comparaison avec les résultats de calcul	191

VI – RÉSULTATS OBTENUS ET INTERPRÉTATION

VI-1. DIMENSIONNEMENT D'UNE POUTRE A MOMENT D'INERTIE CONSTANT A DEUX TRAVEES CONTINUES, COULEE SUR CINTRE ET DECOFFREE EN UNE SEULE PHASE.

VI-1.1. Recherche de la ligne de précontrainte

1) Données :

Soit une poutre à 2 travées de 16 m de portée chacune et de 1 m de hauteur coulée sur cintre et décoffrée en 1 seule phase.

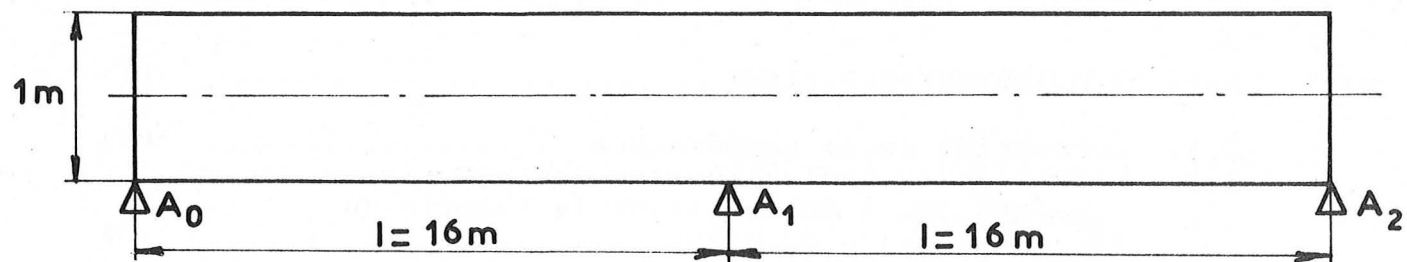


FIG. VI-1

Cette poutre supporte une surcharge de 1 t/m.1 supposée appliquée par travées entières.

Elle est constituée par un profil symétrique dont la section est $0,40 \text{ m}^2$, et le rendement $\rho = 0,40 < 0,5$.

La charge permanente est de 1 t/m

Contraintes admissibles dans le béton :

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}'_b \\ \bar{\sigma}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 \text{ bars} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_a = 21000 \text{ hbars} = 2\,142\,000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E_b = 4000 \text{ hbars} = 408\,000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{ca} = 0,55 R_G = 8\,635 \text{ Kg/cm}^2$$

$$(R_G = 157 \text{ Kg/mm}^2)$$

Nous donnons les détails de calcul des constantes k , a , n ...etc dans le deuxième exemple.

$$\Delta\sigma(t) = K \frac{at^n}{1 + at^n} = \frac{0,15338327 t^{0,382}}{1 + 0,0061182 t^{0,382}}$$

t en jours

$$\psi(t) = \frac{\Delta\sigma(t)}{\sigma_a(o) - 0,55 R_G} = \frac{0,15338327 t^{0,382}}{47,1 + 0,28817 t^{0,382}}$$

t en jours

$$\varphi(t, t_o) = \alpha k_1(t_o) k_2(t - t_o)$$

$$\text{où } \alpha = \phi_c \alpha_f \beta_f = 1,43$$

$$\phi_c = 2 \text{ (humidité relative } \sim 80 \%)$$

$$\alpha_f = 0,65 \text{ (rayon moyen } \sim 14,3 \text{ cm)}$$

$$\beta_f = 1,10 \text{ (} E/c = 0,5, \text{ } c = 400 \text{ kg/m}^3 \text{)}$$

$$k_2(t) = \frac{0,69 t}{0,71988 t + 37,4665}$$

t en jours

$$k_1(t_o) = -0,53 \log(0,14286 t_o) + 1,4$$

$$\beta = \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_a(o)} = 0,647$$

$$\epsilon_r(t, t_o) = 0,0001646 \frac{0,69 t}{0,71988 t + 37,4665} - \frac{0,69 t_o}{0,71988 t_o - 37,4665}$$

2) Courbes enveloppes des moments - Moments sous charge permanente :

Sous une charge p uniforme le moment sur appui est égal à :

$$M_p(A_1) = -p \frac{l^2}{8}$$

Donc les moments en travée s'obtiennent à partir de l'équation :

$$M_p\left(\frac{x}{l}\right) = \underbrace{p \frac{l^2}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right)}_{\text{Moment en travée isostatique}} + \underbrace{M_p(A_1) \frac{x}{l}}_{\text{Moment hyperstatique sur l'appui 1}}$$

$$\text{Soit : } M_p\left(\frac{x}{l}\right) = p \frac{l^2}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) - p \frac{l^2}{8} \frac{x}{l}$$

Le diagramme des moments fléchissants sous charge permanente s'obtient donc en traçant une parabole de flèche $p \frac{l^2}{8}$ à partir de la droite passant sur appui intermédiaire à l'ordonnée $-p \frac{l^2}{8}$ et sur appui d'extrémité à l'ordonnée nulle, appelée "ligne de fermeture". Cette flèche se mesure pour $\frac{x}{l} = 0,5$.

Le moment M_p est nul pour $\frac{x}{l} = 3/4$ soit $x = 12$ m.

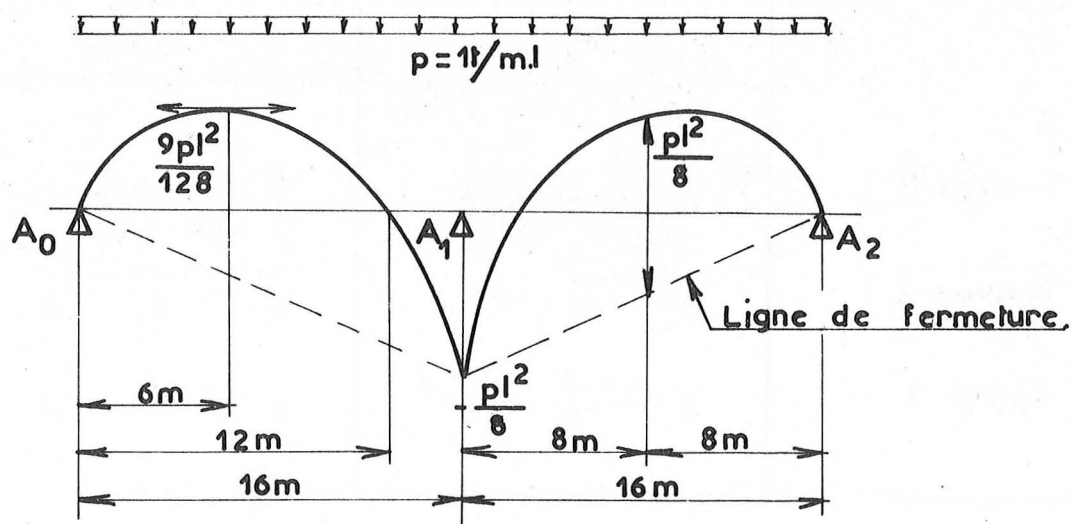


FIG. VI-2

Dans le cas d'une seule travée chargée, le moment sur appui est égal par raison de symétrie à la moitié du moment précédent :

$$M_S(A_1) = -p \frac{l^2}{16}$$

D'où la forme de la courbe des moments sous surcharge, 1 seule travée étant chargée.

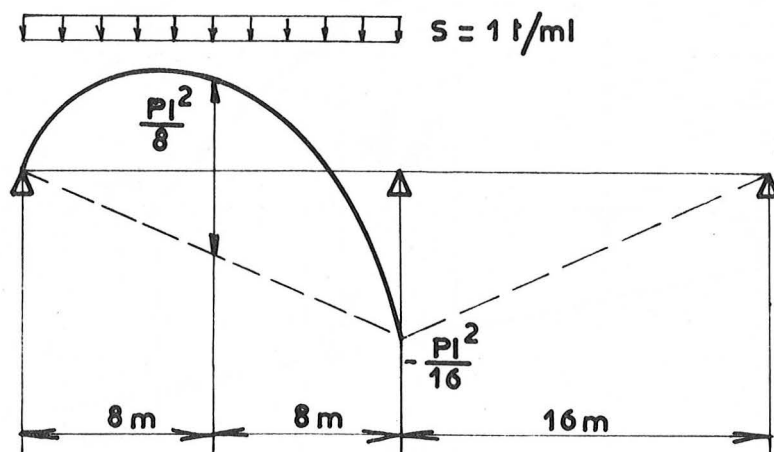


FIG. VI-3

Pour obtenir les moments maxima et minima, on considère des diagrammes précédents en considérant les cas de charges suivants.

	$M_{min.}$	$M_{max.}$
Travée 1		
Travée 2		
Appui 1		

FIG. VI-4

On obtient ainsi les 3 tableaux qui conduisent à la détermination de la courbe enveloppe des moments :

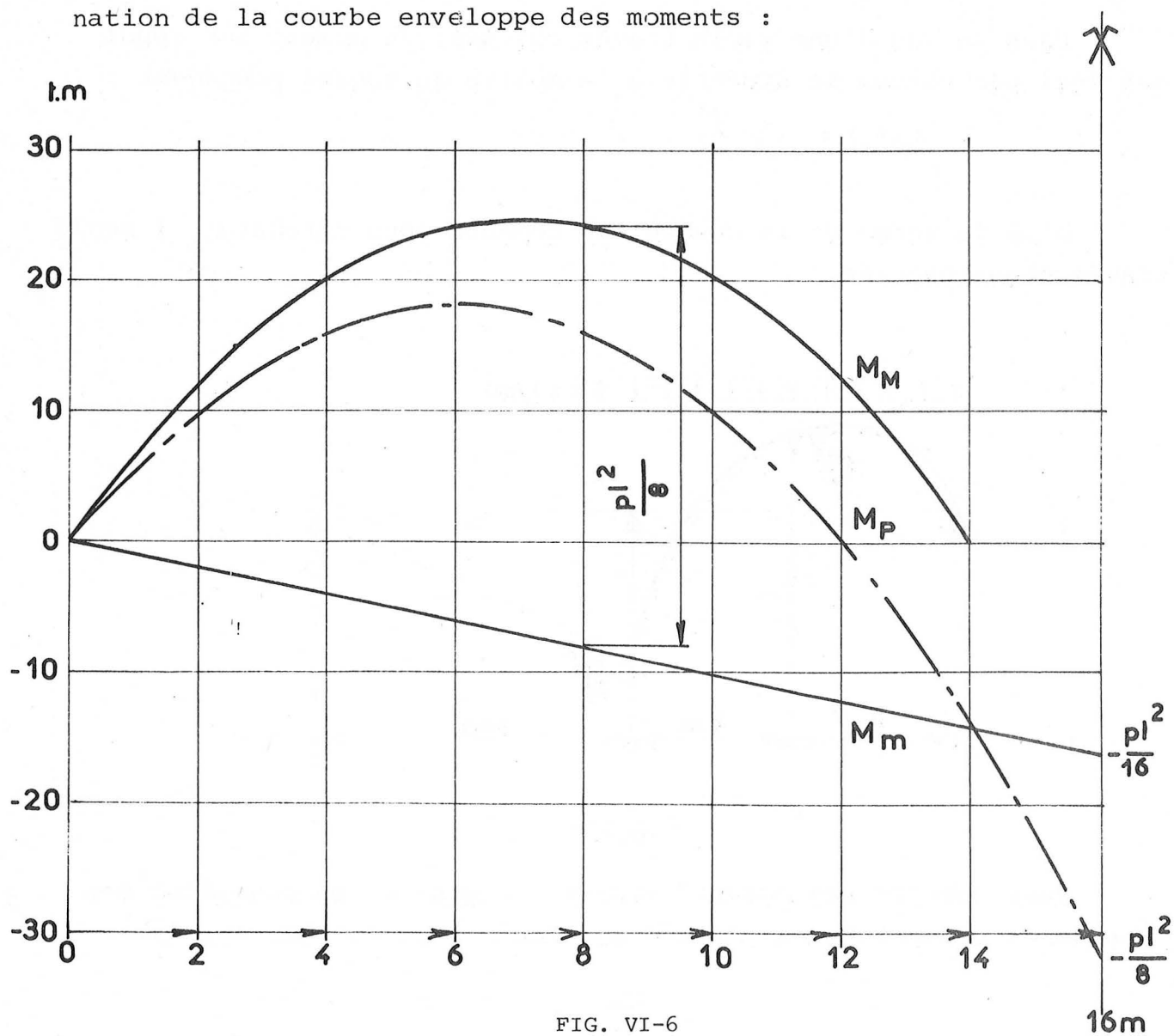


FIG. VI-6

MOMENTS DUS AU POIDS PROPRE :

Section :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x (en m)	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
Ordonnée parabole (t.m)	0	7,5	14	19,5	24	27,5	30	31,5	32	31,5	30	27,5	24	19,5	14	7,5	0
Ligne de fermeture (t.m)	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14	-16	-18	-20	-22	-24	-26	-28	-30	-32
M _P (3) (t.m)	0	5,5	10	13,6	16	17,5	18	17,5	16	13,5	10	5,5	0	-6,5	-14	-22,5	-37

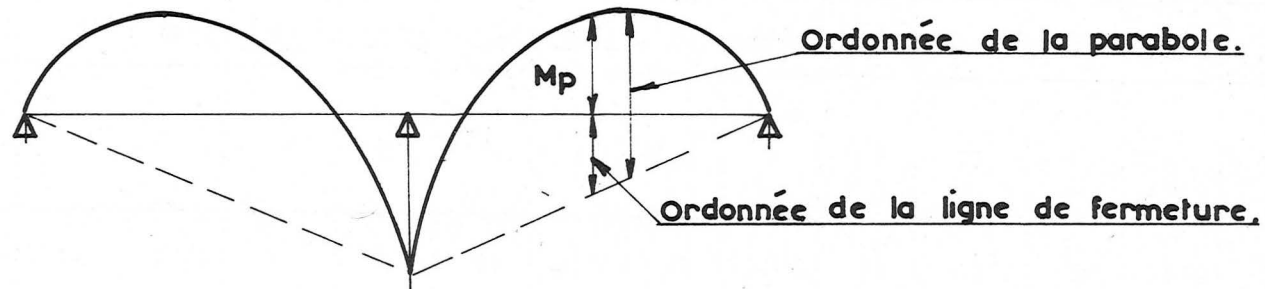


FIG. VI-5

MOMENTS DUS AUX SURCHARGES

Les moments calculés sont ceux dus aux surcharges placées sur une travée :

Section $x(m)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Ordonnée parabole (t.m)	0	7,5	14	19,5	24	27,5	30	31,5	32	31,5	30	27,5	24	19,5	14	7,5	0
Ligne de fermeture = $M_{min}^{(4)}$ (t.m)	0	- 1	- 2	- 3	- 4	- 5	- 6	- 7	- 8	- 9	- 10	- 11	- 12	-13	- 14	-15	- 16
$M_{Max.}^{(5)}$ (t.m)	0	6,5	12	16,5	20	22,5	24	24,5	24	22,5	20	16,5	12	6,5	0	0	0

COURBES ENVELOPPES DES MOMENTS

On obtient la courbe enveloppe en combinant les moments donnés par les tableaux précédents dans les cas de charge les plus défavorables :

Section $x(m)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Sauf $x=15$ et 16 $M_{max.}$ 3 + 5	0	12	22	30	36	40	42	42	40	36	30	22	12	0	- 14	-15	- 32
Sauf $x=15$ et 16 $M_{min.}$ 3 + 4	0	4,5	8	10,5	12	12,5	12	10,5	8	4,5	0	5,5	- 12	-19,5	- 28	-45	- 64
ΔM = $M_m - M_m$	0	7,5	14	19,5	24	27,5	30	31,5	32	31,5	30	27,5	24	19,5	+ 14	+30	32

Détermination de la force de précontrainte

Les 2 sections les plus sollicitées (ΔM maximum) sont :

- la section sur appui A_1 $x = 16$ m
- les sections à mi-travée $x = 8$ m et $x = 24$ m

La ligne de précontrainte $e_{oo}(x)$ doit rester à l'intérieur du fuseau de passage dans les 2 sections lorsque M varie entre M_m et M_M :

$$-c' - \frac{M_m}{F} \leq e_{oo} \leq c - \frac{M_M}{F}$$

$$F \geq \frac{\Delta M}{c + c'} = \frac{\Delta M}{\rho(V + V')} \quad (\text{pour la section rectangulaire})$$

$$F = \frac{32}{0,40 \times (0,50 + 0,50)} = \frac{32}{0,40} = 80 \text{ t}$$

Nous prendrons $F = 80$ t ce qui s'obtient à l'aide de 2 câbles S.T.U.P. 12 $\emptyset$ 7 de 40 t de force unitaire moyenne.

Fuseau de passage :

Nous déterminons le fuseau de passage en portant à partir des bords du noyau limite $\frac{M_m}{F}$ (bord inférieur) et $\frac{M_M}{F}$ (bord supérieur) en supposant F constant.

$$\text{On pose : } e_2 = -c' - \frac{M_m}{F} ; e_1 = c - \frac{M_M}{F} ; c = c' = 0,2$$

FUSEAU DE PASSAGE

Section	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$x = (m)$	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$+ \frac{M_M}{F} (m)$	0	0,150	+0,275	0,375	+0,450	0,500	+0,525	0,525	+0,500	0,450	+0,375	0,275	+0,150	0	-0,175	-0,188	-0,400
$\frac{M_m}{F} (m)$	0	0,056	0,100	0,131	0,150	0,156	0,150	0,131	0,100	0,056	0	-0,069	-0,150	-0,244	-0,350	-0,563	-0,800
$e_1 (x)$	+0,200	+0,050	-0,075	-0,175	-0,250	-0,300	-0,325	-0,325	-0,300	-0,250	-0,175	-0,075	+0,050	+0,200	+0,375	+0,388	+0,600
(m)	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
$e_2 (x)$	-0,200	-0,256	-0,300	-0,331	-0,350	-0,356	-0,350	-0,331	-0,300	-0,256	-0,200	-0,131	-0,050	+0,044	0,150	+0,363	+0,600
(m)	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:

$e_1 (x)$ et $e_2 (x)$ sont comptés à partir du centre de gravité de la section positivement vers le haut.

Ligne de précontrainte $e_{oo}(x)$:

a) Nous savons qu'une ligne funiculaire des charges est une ligne de précontrainte. En effet cette ligne a pour ordonnée :

$$e_{oo}(x) = \frac{M(x)}{F} \quad M \text{ étant le moment dû aux charges et surcharges.}$$

Donc la relation de concordance :

$$J[e_{oo}(x)] = \int_0^{l_1} \frac{x}{l} \frac{M(x)}{I} dx + \int_0^{l_2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{M(x)}{I} dx = 0$$

est vérifiée, car cette relation s'identifie avec la relation de continuité de la poutre au droit de l'appui A_1 c'est-à-dire avec l'égalité des rotations des travées $A_0 A_1$ et $A_1 A_2$ au droit de A_1 :

$$\Omega''_{A_0 A_1} = - \int_0^{l_1} \frac{x}{l} \frac{M}{EI} dx = \Omega'_{A_1 A_2} = + \int_0^{l_2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{M}{EI} dx$$

b) Or nous avons :

$$e_1(x) = c - \frac{M_m}{F} = c - \frac{M_p + M_{s1}}{F} ; \quad c' = c ;$$

$$e_2(x) = -c' - \frac{M_m}{F} = -c' - \frac{M_p + M_{s2}}{F} .$$

(M_{Si} = moment dû à la surcharge dans la travée $i = 1, 2$)

La ligne $e(x) = \frac{e_1(x) + e_2(x)}{2}$ est une ligne funiculaire de la charge $p + \frac{S}{2}$. En effet d'après le premier tableau les cas de charges correspondant à M_m et M_M sont complémentaires, la charge unitaire restant la même. Ainsi pour obtenir M_M et M_m à mi-travée, les surcharges sont placées respectivement comme suit :

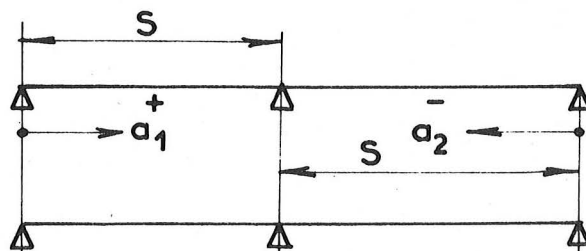


FIG. VI-7

Donc :
$$\frac{M_{s1} + M_{s2}}{2} = \frac{M_s}{2}$$



FIG. VI-8

et
$$e(x) = - \frac{M_P + M_{s/2}}{F}$$
 . Nous prendrons donc comme ligne de

précontrainte $e_{oo}(x) = e(x)$ puisque par ailleurs $e(x)$ est à l'intérieur du fuseau limite.

Les ordonnées de $e_{oo}(x)$ sont données dans le tableau 1.

Tracé du câble :

Nous voyons que le câble réel ne peut pas s'identifier à la ligne de précontrainte car cette dernière sort de la poutre à proximité de la section 16. Nous ne pouvons donc pas adopter un câble concordant. Faisons pivoter la ligne de précontrainte autour du centre de gravité G de la section $x = 0$ de façon à l'abaisser de $e = -0,170$ m au droit de la section 16.

La ligne $e_c(x)$ se déduit de $e(x)$ par la transformation linéaire :

$$e_c(x) = e_{oo}(x) + \Delta e \frac{x}{l}$$

d'où les ordonnées de $e_c(x)$ (voir tableau n° 2)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(en m)																	
e _{oo}	0	-0,103	-0,188	-0,253	-0,300	-0,328	-0,338	-0,328	-0,300	-0,253	-0,188	-0,103	0	+0,122	+0,263	+0,376	+0,600
(en m)																	

TABLEAU N° 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\Delta e_x /$	0	-0,011	-0,021	-0,032	-0,043	-0,053	-0,064	-0,074	-0,085	-0,096	-0,106	-0,117	-0,128	-0,138	-0,149	-0,159	-0,170
(m)																	
e _c (x)	0	-0,114	-0,209	-0,285	-0,343	-0,381	-0,402	-0,402	-0,385	-0,349	-0,294	-0,220	-0,128	-0,016	+0,114	+0,217	+0,430
(m)																	

TABLEAU N° 2

Fuseau limite-Trace du câble.

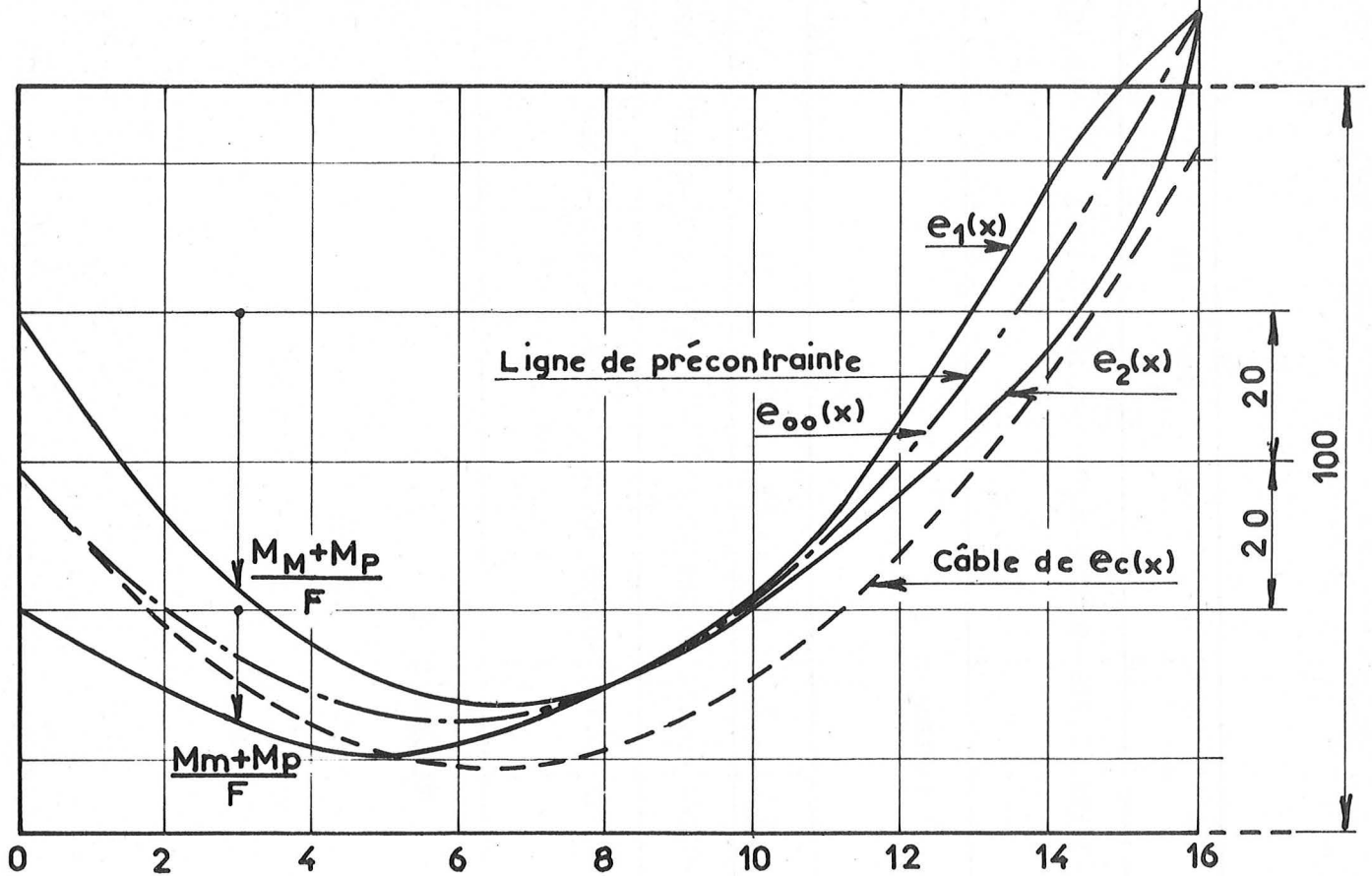


FIG. VI-9

Adoptons $e_c(x)$ pour tracé du câble, ce tracé étant à l'intérieur de la poutre avec un enrobage suffisant et montrons que ce câble admet pour ligne de précontrainte $e_{oo}(x)$; à cette fin, calculons les moments hyperstatiques de précontrainte m_o, m_1, m_2 par la relation des 3 moments.

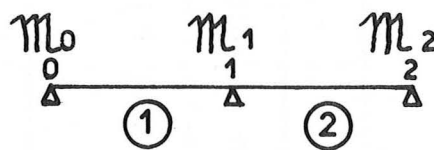


FIG. VI-10

$$b \mathcal{M}_0 + (c + d) \mathcal{M}_1 + b \mathcal{M}_2 = \omega'_2 - \omega''_1$$

or $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_2 = 0$ (sections d'extrémités libres)

$$\mathcal{M}_1 = \frac{\omega'_2 - \omega''_1}{c + d}$$

$$d = c = \frac{l}{3EI} ; \quad \omega'_2 = + \int_0^{l_2} \frac{x}{l_2} F e_c(x) \frac{dx}{EI}$$

$$\omega''_1 = - \int_0^{l_1} \frac{x}{l_1} F e_c(x) \frac{dx}{EI}$$

or $e_c(-\frac{x_2}{l}) = e_c(\frac{x_1}{l})$ symétrie donc $\omega''_1 = \omega'_2$

Par suite

$$\mathcal{M}_1 = \frac{- \int_0^l \frac{x}{l} F e_c(x) \frac{dx}{EI}}{l/3EI} = - \frac{3}{l} \int_0^l F \frac{e_c(x)}{l} x dx$$

$$\mathcal{M}_1 = - 3F \int_0^l \frac{x}{l} e_c(x) \frac{dx}{l} : \quad \text{On pose :}$$

$$K = - 3 \int_0^l \frac{x}{l} e_c(x) \frac{dx}{l}$$

L'intégration de K donne :

$$K = - 3 \int_0^l \frac{x}{l} e_c(x) \frac{dx}{l} = - 3 \int_0^l \frac{x}{l} e_{c0}(x) \frac{dx}{l} - 3 \int_0^l \Delta e \left(\frac{x}{l} \right)^2 dx$$

La première intégrale est nulle car elle représente la relation de concordance pour la ligne de précontrainte. Donc :

$$K = -3 \int_0^l \Delta e \left(\frac{x}{l} \right)^2 dx = -\Delta e \left[\left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]_0^l = -\Delta e$$

$$\text{et : } \mathcal{M}_1 = -F \Delta e$$

De sorte que le moment total de précontrainte vaut :

$$M_0(x) = F e_c(x) + \mathcal{M}(x) = F e_c(x) + \frac{x}{l} \mathcal{M}_1$$

et la ligne de précontrainte du nouveau tracé a pour équation dans la travée 01 :

$$e'_{00}(x) = \frac{M_0(x)}{F} = e_c(x) + \frac{x}{l} \frac{\mathcal{M}_1}{F}$$

$$e'_{00}(x) = e_{00}(x) + \Delta e \frac{x}{l} - \frac{x}{l} \Delta e$$

$$e'_{00}(x) = e_{00}(x)$$

Le nouveau tracé du câble conserve la ligne de précontrainte et permet un enrobage suffisant du câble.

En revanche il développe une réaction d'appui hyperstatique de précontrainte sur l'appui 01 :

$$R_1 = \frac{\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1}{l} + \frac{\mathcal{M}_0 - \mathcal{M}_1}{l}$$

$$R_1 = -2 \frac{\mathcal{M}_1}{l}$$

$$R_1 = 2 \frac{F \Delta e}{l} = \frac{2 \times 80 \times (-0,170)}{16} \text{ t}$$

$$R_1 = -1,7 \text{ t}$$

Il s'agit d'une réaction de soulagement de l'appui central qui par raison de symétrie se traduit par les appuis 0 et 2 par les réactions supplémentaires :

$$R_0 = R_2 = - \frac{R_1}{2} = +0,85 \text{ t}$$

Toutefois, le tracé envisagé pour le câble présente un point anguleux sur l'appui 1 qui est irréalisable. Cependant nous admettons ce tracé pour calculer la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la nouvelle méthode.

Réaction hyperstatique due au poids propre

Etant donné que le moment sur appui 1 est de -32 t.m, la portée est de 16 m et le poids propre est de une tonne par mètre linéaire, nous avons :

$$R_0^p \times 16 - 1 \times 16 \times \frac{16}{2} = -32$$

avec R_0^p : réaction d'appui
zéro (poids propre)

$$\text{d'où } R_0^p = 6^t$$

	: appui 0 en t	: appui 1 en t	: appui 2 en t	: total en t
Réaction due au poids propre en t	+ 6,00	+ 20,00	+ 6,00	+ 32,00
Réaction due à la précontrainte non concordante	+ 0,85	- 1,70	+ 0,85	+ 0
TOTAL	+ 6,85	+ 18,30	+ 6,85	+ 32

VI-1.2. Calcul de la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la théorie du fluage linéaire du béton et de la relaxation
des aciers combinés

Sections t en m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(0) Positions des câbles en m	-0,114	-0,209	-0,285	-0,343	-0,381	-0,402	-0,402	-0,385	-0,349	-0,294	-0,220	-0,128	-0,016	+0,114	+0,217	+0,430
(1) Moments dus au poids propre en t- m	+5,50	+10,00	+13,50	+16,00	+17,50	+18,00	+17,50	+16,00	+13,50	+10,00	+5,50	+ 0,0	-6,50	-14,00	-22,50	-32,00
(2) Moments dus à la non concordance des câbles en t - m	0,85	+1,70	+ 2,55	+3,40	+ 4,25	+5,10	+ 5,95	+6,80	+7,65	+8,50	+9,35	+10,20	+11,05	+11,90	+12,75	+13,60
(3) = (0) x 80 x α Moments dus à l'excentre- ment des câbles en t - m	-9,12	-16,72	-22,80	-27,44	-30,48	-32,16	-32,16	-30,80	-27,92	-23,52	-17,60	-10,24	-1,28	+ 9,12	+17,36	+34,40
(1) + (2) + (3) en t - m	-2,77	-5,02	-6,75	-8,04	-8,73	-9,06	-8,71	-8,00	-6,77	-5,02	-2,75	- 0,04	-3,27	+7,02	+7,61	+16,00
e^2 m ²	0,012966	0,081225	0,145161	0,161604	0,121801	0,048400	0,000256	0,047089	0,184900							
$1 + e^2 \frac{S_p}{I_b}$	1,155952	1,974700	2,741930	2,939240	2,461610	1,580800	1,003072	1,565068	3,218800							
$M(\frac{9T}{52} \frac{2}{2+1}) \frac{9S}{9S}$	117,733711	155,236715	201,123195	245,640608	279,265571	299,362409	299,361594	283,010595	250,714979	207,492079	161,004480	121,874529	102,162883	117,733711	159,402176	327,834780

$$\frac{9T}{52} \frac{2}{2+1} = \frac{9S}{9S}$$

$$\frac{9T}{52} \frac{2}{2+1} = \frac{9S}{9S}$$

$$\frac{9T}{52} \frac{2}{2+1} = \frac{9S}{9S}$$

$$M = \frac{\omega'_2 - \omega''_1}{e + a}$$

$$c = a = \frac{l}{3 E_b I_b} = \frac{16 \times 10^2}{3 \times 408000 \times 3333333} = 0,3921569 \times 10^{-9} \text{ Kg cm}^{-1}$$

$$I_b = \frac{b h^3}{12} = \frac{40 \times 10^6}{12} = 3333333 \text{ cm}^4$$

$$\omega''_1 = \int_0^l \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \frac{\Delta \varepsilon_b}{e} dx$$

$$\omega'_2 = \int_0^l \frac{x}{l} \frac{\varepsilon_b}{e} dx$$

Nous avons pris 10 intervalles, soit 2 m. par intervalle.

ε_b est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_b^x = & \Delta \varepsilon_b^0(x) [A(x, t_i, t_0) - A(x, t_c, t_0)] + \\ & + [\varepsilon_\gamma(t_i, t_0) - \varepsilon_\gamma(t_c, t_0)] [B(x, t_i, t_0) - B(x, t_c, t_0)] + \\ & - a(x) \sum_{k=1}^{k=i-1} [M_0(x) \cdot C(x, t_i, t_c) - M_k \cdot C(x, t_i, t_k)] \end{aligned}$$

$$\text{où } \Delta \varepsilon_b^0 = \frac{k_a \sigma_a(0)}{E_a} ; \quad a = \frac{e}{E_b I_b}$$

$$A = \frac{\varphi - (1-\beta) \psi (1+\varphi)}{1 + K_a (1+\varphi)(1-\varphi)}$$

$$B = \frac{1}{1 + K_a (1+\varphi)(1-\psi)}$$

$$C = \frac{\varphi - K_a (1+\varphi) \psi}{1 + K_a (1+\varphi)(1-\psi)} \frac{1}{1 + K_a}$$

φ, ψ sont définis au paragraphe VI-1.1.

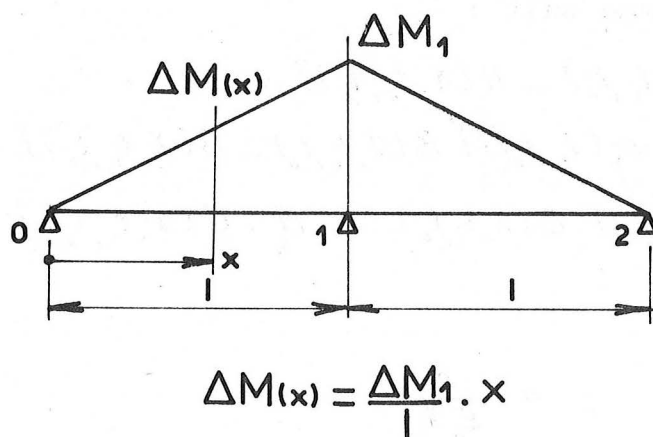
$K_a(x)$ est calculé dans le tableau précédant en prenant 8 intervalles soit 2 m. par intervalle. Il est considéré comme donné pour le programme.

t_0 : temps de la mise en précontrainte de la section x , pour le cas précédent, t_0 est constant ($t_0 = 3$ jours).

t_c : temps de clavage. Etant donné que le pont est coulé sur cintre par conséquent t_c n'est pas pris en considération. ($t_c = 3$ jours).

t_i : temps au i ème intervalle, nous avons pris 5 jours comme intervalle.

ΔM_k : moments successifs de redistribution, ils sont calculés comme suit :



le programme est fait de telle manière que ΔM s'ajoute à ΣM_k déjà calculé à l'itération précédente.

VI-1.3. Résultats obtenus

a) Réactions

Nous extrayons seulement ci-après les résultats obtenus (pas égal à 3 jours et pas égal à 5 jours) sur ordinateur.

Jours comptés à partir du décin- trement	Pas = 3 jours			Pas = 5 jours		
	$R_o = \frac{R_1}{2}$ en t	appuis de rive 6,85 + R_o en t	appui central $18,3-2R_o$ en t	$R_o = \frac{R_1}{2}$ en t	appuis de rive 6,85 + R_o en t	appui central $18,3-2R_o$ en t
	Valeurs cumu- lées dues au fluage	Valeurs fi- nales.	Valeurs fi- nales.	Valeurs cumu- lées dues au fluage.	Valeurs fina- les.	Valeurs fina- les.
33	0,76	7,61	16,8	0,75	7,60	16,8
63	1,29	8,14	15,7	1,27	8,12	15,8
93	1,68	8,53	14,9	1,66	8,51	15,0
123	1,97	8,82	14,4	1,95	8,80	14,5
153	2,21	9,06	13,9	2,18	9,03	13,9
183	2,40	9,25	13,5	2,37	9,22	13,6
213	2,55	9,40	13,2	2,52	9,37	13,3
243	2,68	9,53	12,9	2,65	9,50	13,0
273	2,78	9,63	12,7	2,75	9,60	12,8
303	2,87	9,72	12,6	2,84	9,69	12,6
333	2,95	9,80	12,4	2,92	9,77	12,5
363 (1 an)	3,01	9,86	12,2	2,98	9,83	12,3
393	3,07	9,92	12,3	3,04	9,89	12,2
423	3,12	9,97	12,1	3,09	9,94	12,1
453	3,16	10,00	12,0	3,13	9,98	12,0
483	3,20	10,00	11,9	3,17	10,00	12,0
513	3,23	10,10	11,8	3,20	10,10	11,90
543	3,17	10,00	12,0	3,23	10,10	11,80
633	3,34	10,20	11,6	3,31	10,20	11,70
747 (~ 2ans)	3,40	10,30	11,5	3,37	10,20	11,6
1053 (~ 3ans)	3,50	10,40	11,3	3,47	10,30	11,4
1460 (~ 4ans)				3,54	10,40	11,2

Nous traçons R_o et R , en fonction du temps et des pas pris dans le programme. Nous pouvons tirer les conclusions suivantes (figure VI-11).

1) La redistribution des efforts hyperstatiques est très forte pendant les 8 premiers mois (environ 77 %).

2) La redistribution des efforts commence à se stabiliser à partir de 540 jours, soit environ un an et demi.

3) D'après les courbes de la figure VI.2, nous constatons que quand les pas (en jours) pris en compte dans le programme diminuent la courbe des réactions redistribuées tend vers une limite, c'est-à-dire que la variation des efforts entre les courbes 3 et 2 pour le même jour est plus petite que celle entre les courbes 1 et 2. D'ailleurs la courbe 2 est pratiquement confondue avec la courbe 3.

C'est la raison pour laquelle nous conseillons de prendre un pas égal à 3 jours. Il est inutile dans ce cas de faire un programme dont les pas sont variables.

4) Temps de calcul

Le choix d'un pas égal à 3 jours permet d'attendre une précision suffisante. Le temps de calcul correspondant est de 15 minutes (ordinateur IRIS 80), et permet de déterminer les réactions redistribuées pour une durée de 3 ans et demi.

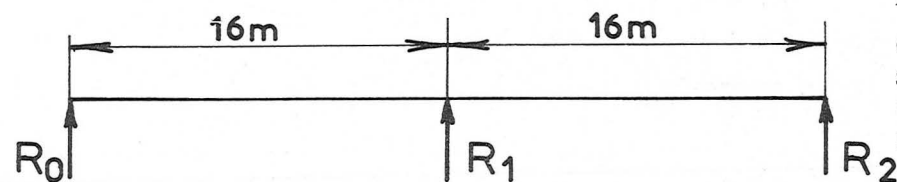
b) Moments

Il est intéressant de connaître la ligne représentative des moments hyperstatiques de redistribution. Nous donnons les résultats sous la forme du tableau n° 3 (pas = 3 jours).

Dans la figure VI-13, nous avons présenté l'évolution des moments fléchissants (poids propres, précontrainte, effet hyperstatique de la précontrainte) en fonction du temps (pas = 3 jours). Nous constatons que les moments changent de signe en fonction du temps et le moment sur appui après redistribution devient très grand. En effet nous n'avons pas compté les effets dus aux armatures passives. Si l'on en tient compte dans le calcul, l'effet de la redistribution sera surement diminué. En outre une poutre sous chaussée routière supporte dans la réalité des charges inférieures à la valeur prise dans le présent calcul. Par conséquent la précontrainte initiale choisie est sensiblement supérieure à ce qu'elle serait dans une poutre de pont. Ainsi les effets de la redistribution y seraient moins marqués.

Sections x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Moments initiaux en t-m	- 2,77	- 5,02	- 6,75	- 8,04	- 8,73	- 9,06	- 8,71	-8,00	- 6,77	- 5,02	- 2,75	- 0,04	+ 3,27	+ 7,02	+7,61	+16,00
Moments de redistribution (33 j)	0,76	1,52	2,28	3,04	3,80	4,56	5,32	6,08	6,84	7,60	8,36	9,12	9,88	10,64	11,40	12,16
Moments réels (33 j)	- 2,01	- 3,50	- 4,47	- 5,00	- 4,93	- 4,50	- 3,39	-1,92	0,07	2,58	5,61	9,08	13,15	17,66	19,01	12,92
Moments de redistribution (123 j)	1,97	3,94	5,91	7,88	9,85	11,82	13,70	15,76	17,73	19,70	21,67	23,64	25,61	27,58	29,55	31,52
Moments réels (123 j)	- 0,80	- 1,08	- 0,84	- 0,16	1,12	2,76	5,08	7,76	10,96	14,68	18,92	23,60	28,88	34,60	37,16	47,52
Moments de redistribution (363 j)	3,01	6,02	9,03	12,04	15,05	18,06	21,07	24,08	27,09	30,10	33,11	36,12	39,13	42,14	45,15	48,16
Moments réels (363 j)	0,24	1,00	2,28	4,00	6,32	9,00	12,36	16,08	20,32	25,08	30,36	36,08	42,40	49,16	52,76	64,16
Moments de redistribution (747 j)	3,40	6,80	10,20	13,60	17,00	20,40	23,80	27,20	30,60	34,00	37,40	40,80	44,20	47,6	51,00	54,40
Moments réels (747 j)	0,63	1,78	3,45	5,56	8,27	11,34	15,09	19,20	23,83	28,98	34,65	40,76	47,47	54,62	58,61	70,40

TABLEAU N° 3



Poids propre	+ 6,00t = R_0	
Câbles	+ 0,85t	
Somme	6,85t	$\frac{10,4-6,85}{6,85} = 51,82 \%$
t $\rightarrow \infty$	10,40t (pas=5jours)	
Redistribution	3,55t	

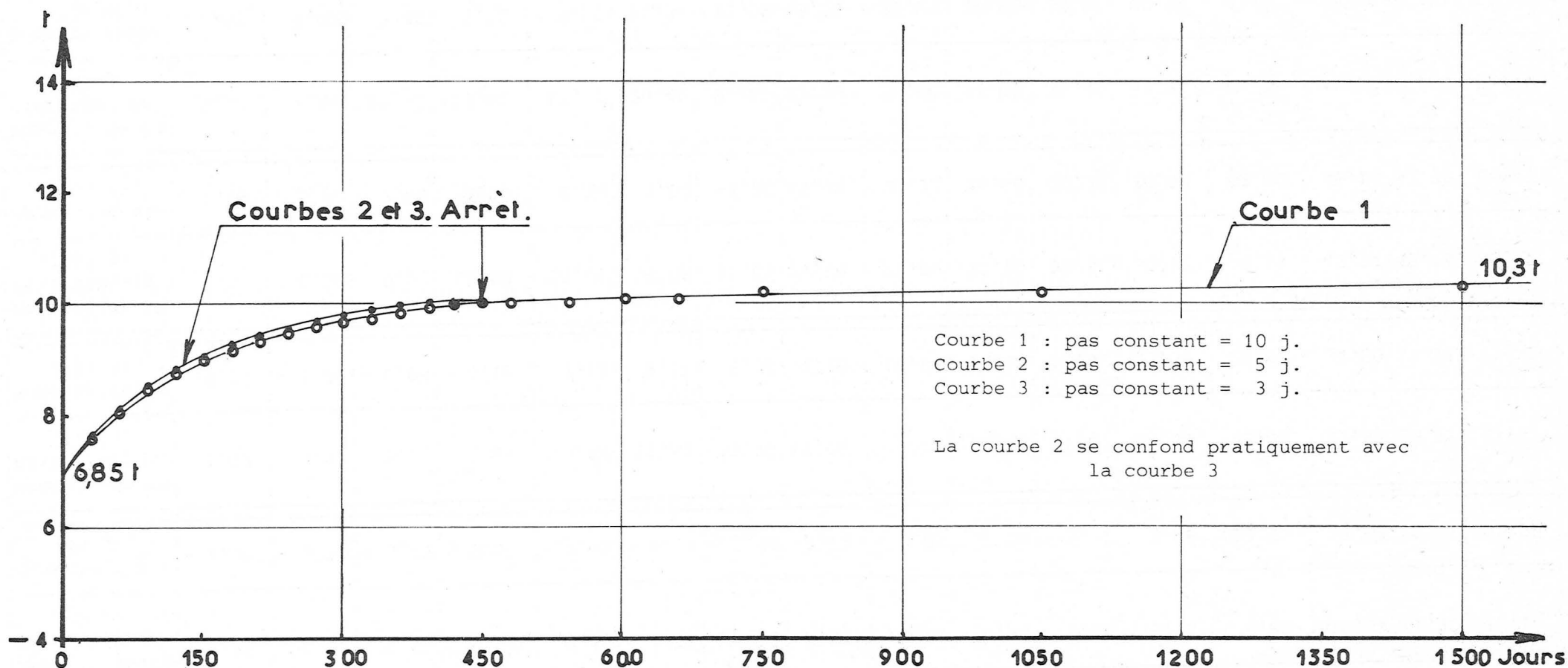


FIG. VI-11 - EVOLUTION DE REACTION D'APPUI R_0 EN FONCTION DU TEMPS ET DES PAS (EN JOURS) PRIS DANS LE PROGRAMME.

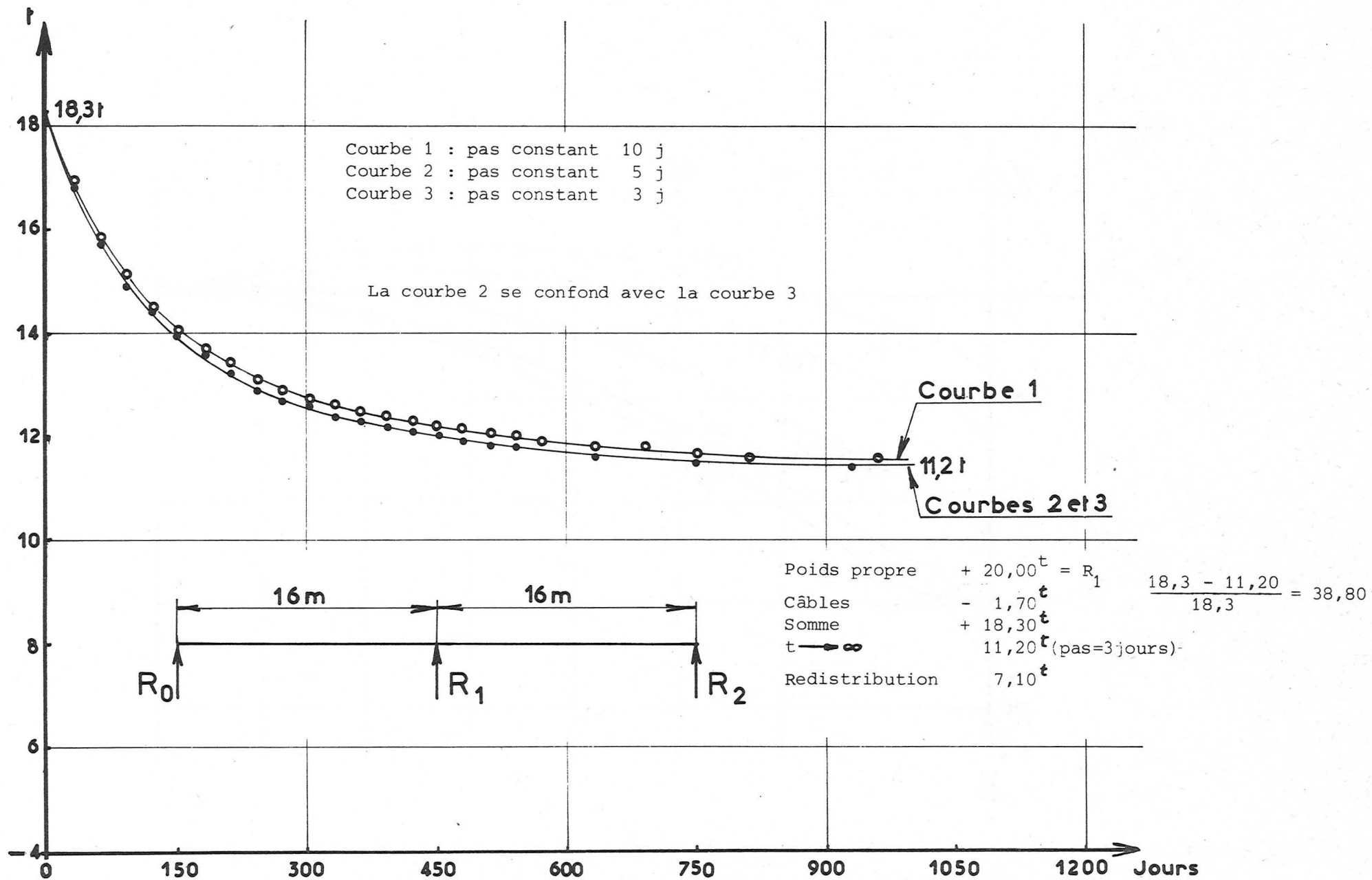
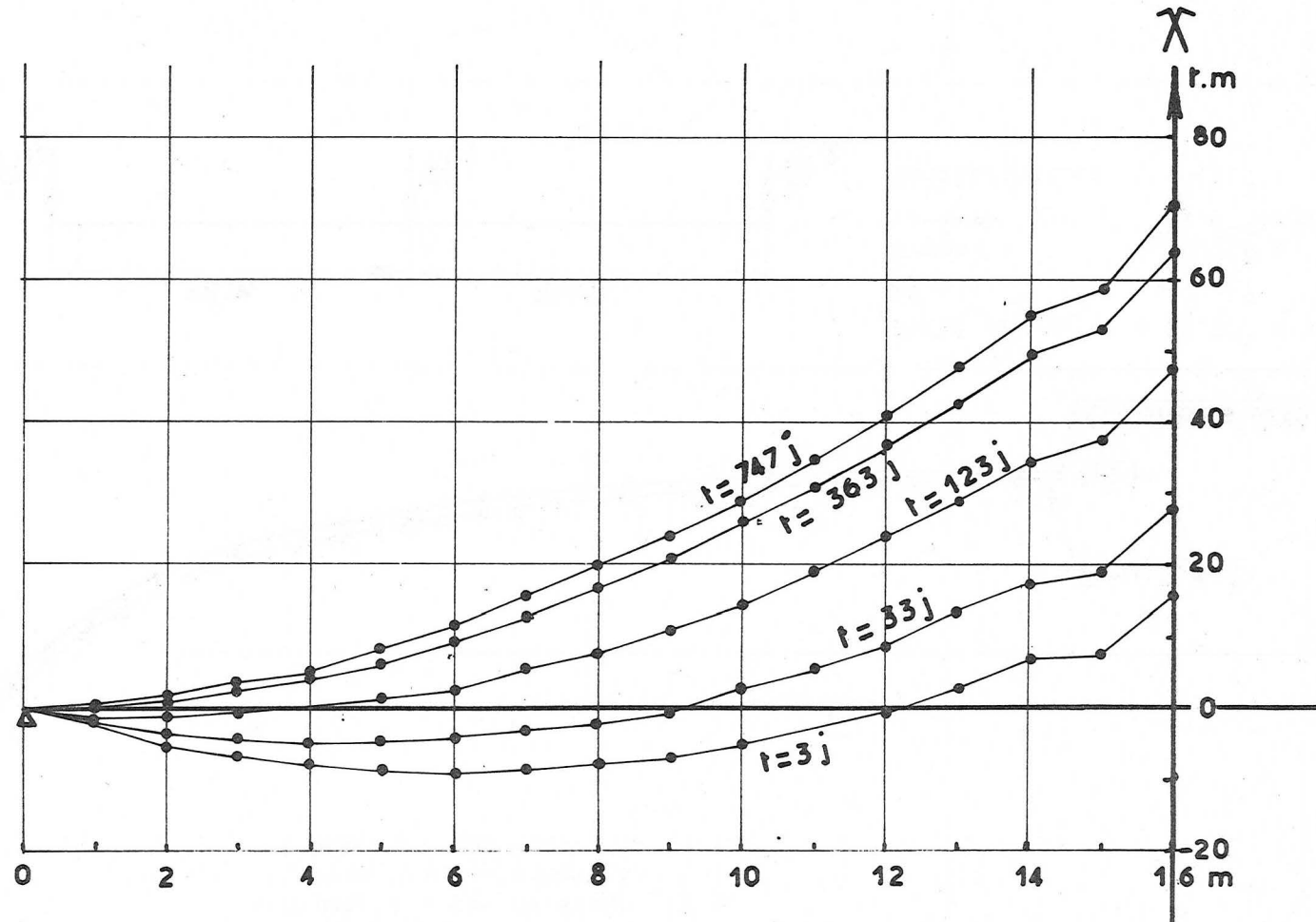


FIG. VI-12 - EVOLUTION DE REACTION D'APPUI R₁ EN FONCTION DU TEMPS ET DES PAS (EN JOUPS) PRIS DANS LE PROGRAMME

(FIG. VI-13) - EVOLUTION DES MOMENTS FLECHISSANTS (poids propre - précontrainte - effet hyperstatique de la précontrainte) en fonction du temps (pas = 3 jours).



VI-1.4. Etude de la sensibilité des divers facteurs

a) Calcul des moments initiaux.

Pour un pont coulé sur cintre, si nous voulons avoir une précision raisonnable, nous devons partager la portée en 8 à 10 intervalles égaux. Si nous voulons avoir la même précision et un plus petit nombre d'intervalles, nous devons partager la portée en intervalles inégaux. Les intervalles seraient plus petits près des appuis à cause du relevage rapide des câbles.

Pour un pont construit en encorbellement, nous conseillons de prendre chaque voussoir comme un intervalle (voir VI-2.3.).

b) Loi de fluage

- Loi K_1

La loi K_1 dépend du durcissement du béton à l'âge de la mise en charge. Pour le programme dont les pas sont constants (3 jours) nous avons pris deux lois différentes de K_1 et comparé les résultats

$$K_1^1 = - 0,53 \log (0,143 t_o) + 1,4 \quad (\text{cas 1})$$

et $K_1^2 = - 0,27 \log (0,143 t_o) + 1,4 \quad (\text{cas 2})$

Nous avons trouvé :

Jours	Cas 1 R_o^1 en t	Cas 2 R_o^2 en t	Erreurs en % $\frac{R_o^1 - R_o^2}{R_o^1}$
30 (1 mois)	0,700	0,692	1,14
102	1,770	1,860	5,09
354 (1 an)	2,990	3,690	23,34
708 (2 ans)	3,380	4,620	52,10
1095 (3 ans)	3,510	5,020	43,02

à noter que quand $K = -0,53$, la formule K_1^1 proposée a déjà 10 % d'erreur par rapport à la courbe du règlement (voir VI-2.3., vérification de K_1 .)

Compte tenu de la possibilité d'effectuer les calculs sur ordinateurs, M. Fauchart a néanmoins préféré employer des représentations mises sous forme de rapports de polynômes dont le degré a été déterminé par le nombre de points de coïncidence avec la courbe représentée dans les recommandations FIP-CEB soit :

$$K_1(t_o) = \frac{-22264 + 3910,5 t_o + 163,5 t_o^2 + 0,2553 t_o^3}{-12479 + 1629 t_o + 211,6 t_o^2 + t_o^3}$$

nous pensons que la constante K de la fonction K_1 joue un rôle très important, il est conseillé de bien choisir ce chiffre. L'attention est à attirer sur la différence entre la constante K , représentant le degré d'approchement de la formule et de la courbe donnée par le règlement, et la fonction K_1 , représentant la date de mise en précontrainte.

c) Coefficient K_2

La loi K_2 exprime le développement de la déformation différée en fonction du temps. Pour le programme dont les pas sont constants (3 jours) nous avons pris deux lois différentes de K_2 et comparé les résultats.

$$K'_2 = \frac{0,69 (t - t_o)}{0,71988 (t - t_o) + 37,4665}$$

$$K_2^2 = 1 - e^{-0,006 (t - t_o)}$$

On peut trouver le détail de calcul des constantes K_2 au chapitre VI 2.3. La loi K_2^2 dont la courbe est nettement au-dessous de celle du règlement est prise en compte pour le calcul classique de redistribution des réactions hyperstatiques grâce à la simplicité de la forme pour la transformation de Laplace. Toutefois, M. Fauchart propose une autre formule qui approche de la courbe représentée dans

la courbe représentée dans les recommandations FIP-CEB soit :

$$K_2 (t-t_o) = \frac{-207644000 (t-t_o) + 64057900 (t-t_o)^2}{-10079300000 + 2769250000 (t-t_o) + 137335000 (t-t_o)^2} + \frac{132563 (t-t_o)^3 + 303,6 (t-t_o)^4 + (t-t_o)^5}{20992 (t-t_o)^3 + 645 (t-t_o)^4 + (t-t_o)^5}$$

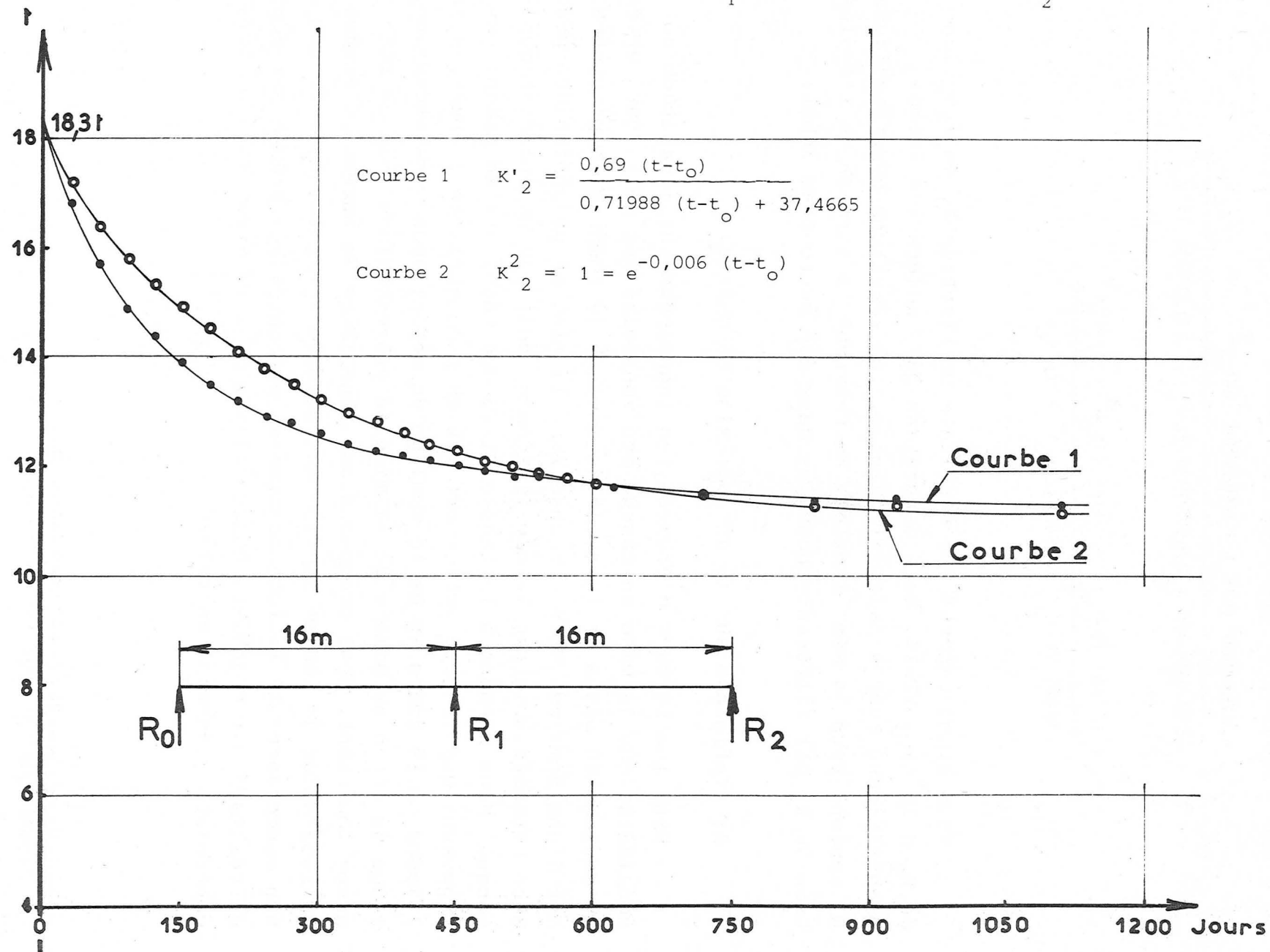
Nous avons reporté les résultats de réaction R_1 en fonction de K_2 à la fig. VI-14. Nous constatons que, malgré les formes mathématiques tout à fait différentes, les réactions hyperstatiques R_1 tendent vers la même limite*. En revanche la vitesse de l'évolution de R_1 est différente pour les deux cas surtout au début.

d) Influence sur la date de mise en charge.

Dans les bureaux d'études, les ingénieurs ont l'habitude de considérer que la mise en charge des voussoirs est de 3 jours après le coulage du béton et le cycle de coulage (y compris la précontrainte) est d'une semaine. Mais sur chantier, la mise en précontrainte peut être retardée soit par le mauvais temps, soit par un incident quelconque. Nous donnons à la figure VI-15 des résultats de calcul en supposant que le pont entier est mis en précontrainte 3 jours, 5 jours, 7 jours ou 10 jours après le coulage du béton. Nous constatons que l'âge du béton au moment de la mise en précontrainte joue un rôle assez important. Nous proposons aux ingénieurs de bureaux d'études de recalculer la redistribution des efforts hyperstatiques en cas de non concordance de la date de mise en précontrainte prévue aux projets et réalisée sur chantier, puisqu'il y a 20 % d'erreur si l'on précontraint 1 semaine en retard.

* de même que les deux lois testées.

FIG. VI-14 EVOLUTION DE REACTION D'APPUI R_1 EN FONCTION DU TEMPS ET K_2



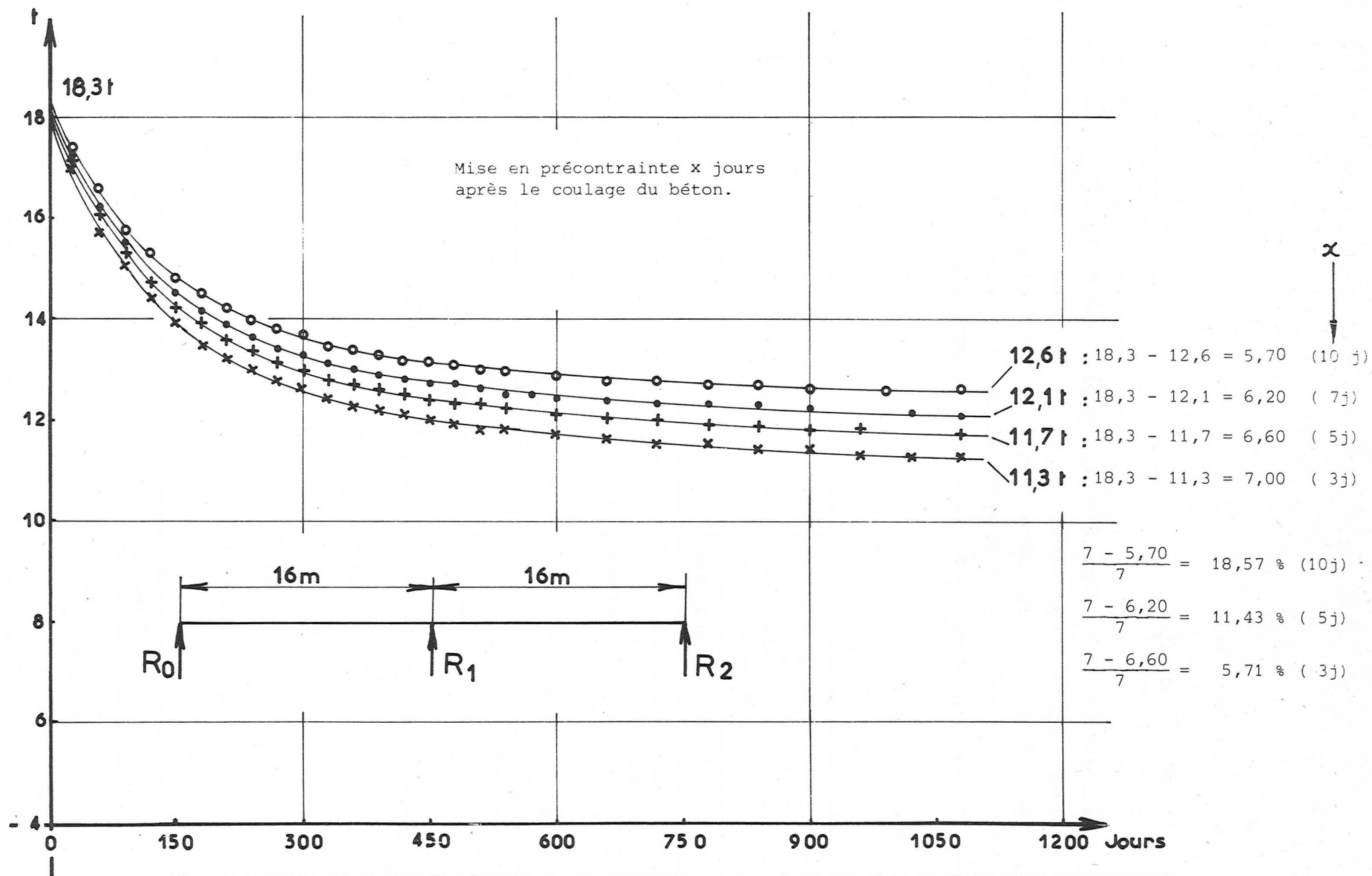


FIG. VI-15 - EVOLUTION DE REACTION D'APPUI R₁ EN FONCTION DU TEMPS ET DU JOUR DE MISE EN PRECONTRAINT

e) Influence de α

$$\alpha = \phi_c \alpha_f \beta_f$$

Le coefficient β_f dépend de la composition du béton, il est fonction du rapport : eau/ciment et le coefficient α_f dépend de l'épaisseur fictive de la pièce. Ces deux coefficients sont souvent faciles à fixer au stade du projet. Il en va autrement du coefficient ϕ_c qui dépend des conditions climatiques (hygrométrie).

Nous avons :

Cas	Conditions de conservation du béton.	Humidité relative de l'air en %	ϕ_c
0	Conservation dans l'eau	100	1
1	dans l'air très humide	90	1,5
2	Coefficient habituellement utilisé par des ingénieurs des bureaux d'études	80	2
3	Généralement en plein air	70	2,3
4	Très sec	50	2,85

Nous allons comparer les résultats des 4 cas ci-dessus, d'où

$$\alpha_1 = 0,65 \times 1,1 \times 1,5 = 1,07$$

$$\alpha_2 = 0,65 \times 1,1 \times 2 = 1,43$$

$$\alpha_3 = 0,65 \times 1,1 \times 2,30 = 1,64$$

$$\alpha_4 = 0,65 \times 1,1 \times 2,85 = 2,04$$

	1er cas	2ème cas	3ème cas	4ème cas
La variation de R_1 en t au bout de 1137 jours	5,2	<u>7,0</u>	9,82	11,4

D'après le tableau ci-dessus, nous constatons que l'hygrométrie joue aussi un très grand rôle dans la redistribution des efforts hyperstatiques. Cependant l'hygrométrie varie en fonction du temps et vaut en moyenne 80 % (voir Fig. VI-16). Il s'avère que le coefficient pris habituellement ($\phi_c = 2$) pour les ingénieurs des bureaux d'études est proche de la réalité.

f) Influence de l'excentricité des câbles

Il peut arriver que par suite d'erreurs d'exécution la position réelle des câbles dans un ouvrage en béton précontraint s'écarte sensiblement de la cote prévue dans le projet. Nous examinons dans cette partie l'influence d'une variation d'excentrement d'un câble sur la valeur des réactions d'appui à long terme.

Compte-tenu du fait que ces écarts sont localisés, nous supposons que dans une seule section proche des appuis (là où le moment négatif est maximal) l'excentrement du câble présente un écart de 20 % par rapport à l'excentrement théorique.

Section	excentrement (en m)	excentrement réel (en m)	$K_a \times 10^6$ valeur cor- recte	$K_a \times 10^6$ valeur réelle	réaction correcte R_1 en t	réaction réelle R_1 en t
15	0,217	0,174	159,402176	138,85822	7,04	6,98

D'après le résultat de calcul, nous n'avons pas trouvé de différence de réaction d'appui pour les deux cas précédents

g) Retrait

Nous avons pris deux fonctions différentes suivantes.

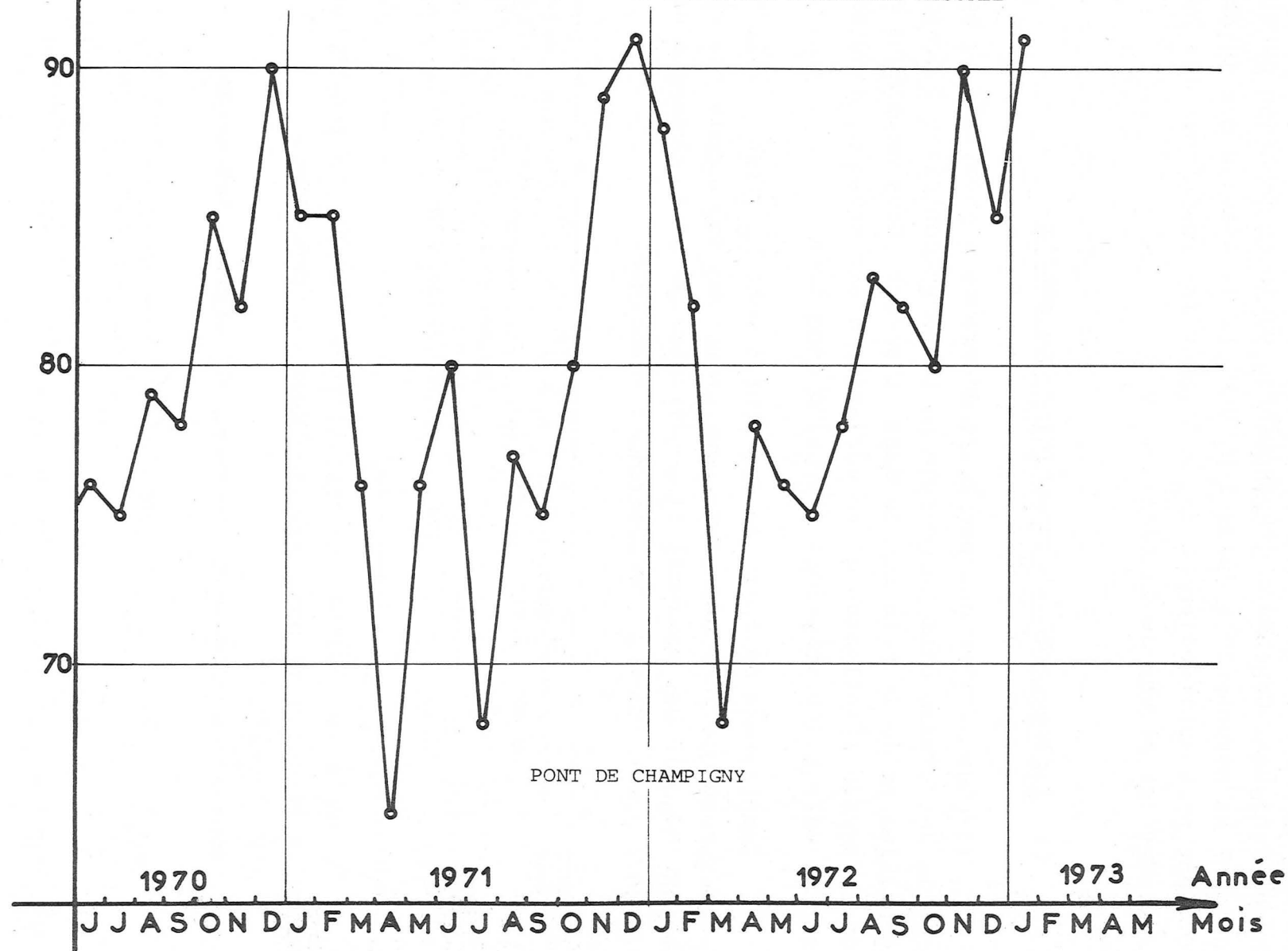
$$1) \varepsilon_r(t, t_0) = \varepsilon_r(t) - \varepsilon_r(t_0) = 0,0001646 \left(\frac{0,69 t}{0,71988t + 37,4665} - \frac{0,69 t_0}{0,71988t_0 + 37,4665} \right)$$

$$2) \varepsilon_r(t, t_0) = \varepsilon_r(t) - \varepsilon_r(t_0) = 0,0001646 (1 - e^{-0,006t}) - (1 - e^{-0,006t_0})$$

Hygrométrie.
%

FIG. VI-16

EVOLUTION D'HYGROMETRIE MOYENNE MENSUELLE MESUREE



Nous avons trouvé, malgré les formes mathématiques différentes, que les deux R_1 , tendent vers la même limite. En revanche la vitesse de l'évolution de R_1 est différente. Ce résultat est analogue à celui obtenu pour la fonction K_2 sachant que $K_2(t, t_0) = K_2(t - t_0)$

VI-2 PONT DE CHAMPIGNY-SUR-YONNE

VI-2.1. Correction de la température

Au bout de quatre ans de mesures, nous avons trouvé que les variations de la température moyenne dans une section du pont de Champigny sont très grandes.

température maximale en ° C		température minimale en ° C	
27.7	9/07/1970	1.5	12/02/1970
27.1	9/07/1971	1.7	12/03/1971
25.7	7/09/1972	1.3	12/01/1973
24.7	7/09/1974		

L'écart maximal de la température moyenne est environ 27° C et le gradient maximal de température (la différence de température entre le hourdis supérieur et le hourdis inférieur) est de 6° C. Nous attirons l'attention sur le fait que les sondes de température ont été placées à l'intérieur du caisson). Par conséquent l'écart maximal de la température et le gradient de température peut être estimé à 40° C et 10° C respectivement. (Les différences de la température entre la surface extérieure et intérieure de la dalle supérieure et inférieure sont de 10° C et 5° C respectivement).

Une méthode de calcul générale des corrections de température a été exposée au chapitre II.

Pour certains ponts de forme simple, ou de moment d'inertie

constant, nous pouvons simplifier la formule II-34 comme suit :

$$\omega = \int_0^{t_i} \left[\frac{z_i}{t_i} \frac{\int_{-y}^{+y} \left\{ \theta(y) - \frac{\int_{-y}^{+y} \theta(y) b(y) dy}{\int_{-y}^{+y} b(y) dy} \right\} b(y) dy}{E I_i} \right] dz_i \quad (A)$$

où les axes x, y et z sont attachés à la section et l'axe du pont respectivement.

La formule précédente repose sur les hypothèses suivantes :

a) Les fibres du tablier situées au même niveau ($y = \text{constante}$) dans une section donnée ($z = \text{constante}$) sont à la même température.

b) Les sections, avant et après la déformation sont restées planes.

Ceci revient à dire que

1) La température fictive est attachée au centre de gravité de la section étudiée. La définition de la température fictive est donnée par la formule suivante.

$$\frac{\int_{-y}^{+y} \theta(y) b(y) dy}{\int_{-y}^{+y} b(y) dy}$$

2) La rotation fictive est égale à la rotation réelle. La rotation fictive est définie par la formule suivante.

$$\frac{\alpha}{I} \int_0^y \theta(y) (y - y') b(y) dy$$

où y' est la distance entre la fibre inférieure de la section et le centre de gravité.

c) Les efforts normaux induits par les appareils d'appuis sont négligeables.

D'après ces formules (la formule II-34 et la formule A), nous pouvons faire la correction des réactions hyperstatiques dues à

la température assez bien à la condition que la variation de la température extérieure soit assez lente. En effet, nous avons mis toutes les sondes de température à l'intérieur de la section, or la variation de la température est assez grande entre les faces extérieures et intérieures de la dalle supérieure du caisson. (environ 10° C pour le pont de Champigny).

Cela revient à dire que les températures mesurées donnent une idée incomplète de la distribution réelle des températures dans le pont, et il est clair que la connaissance approfondie du champ de température exige un appareillage très lourd.

En revanche pour atteindre le but limité que nous nous sommes fixés, qui consiste à corriger les effets de la température sur les réactions d'appui, il suffit d'effectuer les mesures lorsque les variations de température ne sont pas trop rapides, c'est-à-dire très tôt le matin.

Les valeurs de réaction d'appui brutes et après correction des effets thermiques sont données au paragraphe VI-2.4.

VI.2.2. Calcul de la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la théorie du fluage linéaire du béton.

La théorie du fluage linéaire du béton est développée au chapitre III. Etant donné que la méthode de calcul est tout à fait différente de celle d'un pont classique nous donnons ci-dessous les différentes étapes du calcul.

- A - Imaginons le pont entièrement construit.
B - Calculons les rotations des poutres rendues isostatiques soumises aux actions exercées pendant la construction (poids propre des voussoirs et effet des câbles)

Notons que : 1 - Le diagramme du moment dû aux câbles est rectangulaire,

- 2 - Les dates de mise en contrainte de chaque voussoir sont différentes, par conséquent les rotations doivent être séparément calculées pour chaque voussoir.

C - Calculons les moments hyperstatiques.

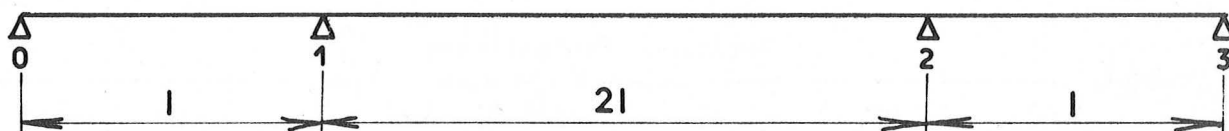
D - Choisissons la loi de fluage. Il s'avère qu'il est impossible de calculer à la main la redistribution des réactions hyperstatiques, si la loi n'est pas choisie de la forme $1 - e^{-\beta(t-t_0)}$ où β varie, d'après les règlements français, comme suit :

Jours	β
1	0,100
3	0,050
7	0,033
14	0,026
90	0,010
365	0,003

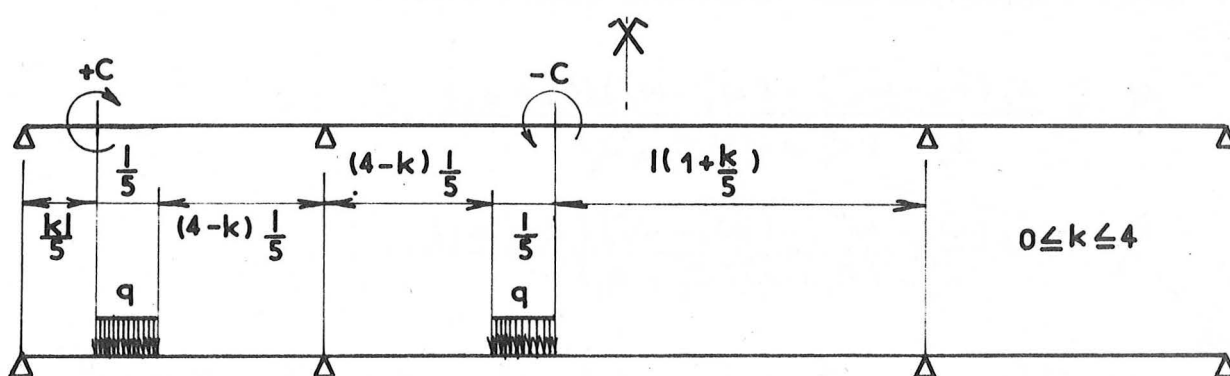
E - Calculons les moments hyperstatiques en fonction du temps, en utilisant la formule III-67. Si l'on désire connaître la limite des variations hyperstatiques, il suffira de faire tendre vers l'infini le temps dans la première partie de la formule.

Calcul des rotations

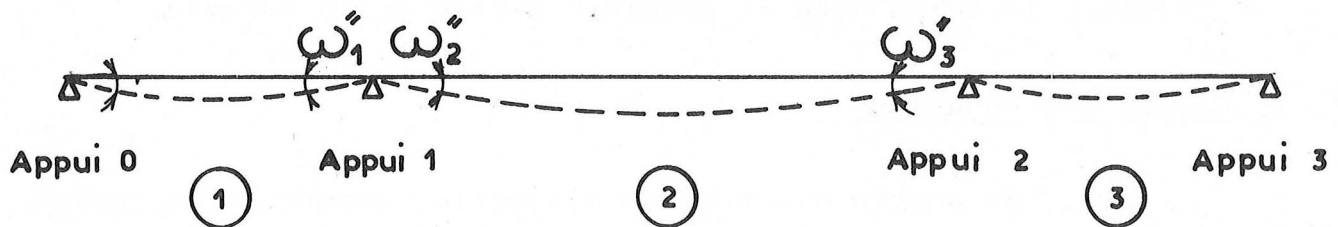
Soit une poutre à 3 travées d'inertie, constante de portée $l, 2l, l$.



Nous simplifions l'effet de la précontrainte en la supposant exercée par des câbles horizontaux dont l'excentricité est de e . L'action d'un câble équivaut donc à celle d'un effort normal F et à celle de 2 couples $\pm C = F \cdot e$ appliqués au droit des ancrages. Le poids propre d'un voussoir est de q (kg/m.). Nous avons 5 voussoirs pour la travée gauche et la travée droite.



Les rotations d'une poutre isostatique sous ces charges extérieures sont les suivantes :



Charges	Rotations isostatiques		
	$EI \omega''_1$	$EI \omega'_2$	$EI \omega''_2$
effet d'un voussoir (q)	$\frac{ql^3}{15000} (49+96K-6K^2-4K^3)$	$-\frac{ql^3}{30000} (1529+36K-66K^2-4K^3)$	$\frac{ql^3}{30000} (1431-156K-54K^2+4K^3)$
effet d'un câble (+ C)	$\frac{c \cdot l}{100} (50-20K+2K^2)$	$-\frac{c}{100} (+ 25-10K+K^2)$	$+\frac{c}{100} (75-10K-K^2)$

Calcul des moments hyperstatiques

d'après l'équation des 3 moments nous avons :

$$M_1 = \frac{b_2(\omega'_3 - \omega''_2) - (\omega'_2 - \omega''_1)(c_2 + a_3)}{b_2^2 - (c_1 + a_2)(c_2 + a_3)}$$

$$M_2 = \frac{b_2(\omega'_2 - \omega''_1) - (\omega'_3 - \omega''_2)(c_1 + a_2)}{b_2^2 - (c_1 + a_2)(c_2 + a_3)}$$

où

$$a_i = 2b_i = c_i = \frac{l}{3EI}, \quad (i = 1, 3, \dots); \quad a_2 = 2b_2 = c_2 = \frac{2l}{3EI}$$

d'où

$$M_1 = \frac{3}{8l} (-3\omega''_1 + 3\omega'_2 + \omega''_2)$$

$$M_2 = \frac{3}{8l} (\omega''_1 - \omega'_2 - 3\omega''_2)$$

La réaction isostatique de la travée 2 due au poids propre est de :

$$R = \frac{q l}{100} (11 + 2 K)$$

et le moment isostatique à la clé de la même travée est de :

$$\mu = \frac{q l^2}{100} (9 - 2 K)$$

Le moment isostatique dû au couple c à la clé de la travée 2 est nul. Le moment total à la clé est de :

$$M_c^* = \mu + \frac{M_1 + M_2}{2}$$

$$M_c^* = \mu + \frac{3}{8 l} (-\omega''_1 + \omega'_2 - \omega''_2)$$

$$\text{d'où } M_c^* (\text{voussoirs}) = + \frac{q l^2}{40000} (2071 - 863 K + 66 K^2 + 4 K^3)$$

$$M_c^* (\text{câbles}) = - \frac{3 c}{400} (+ 75 - 20 K + K^2)$$

Loi du fluage du béton

Si l'on utilise la loi (voir Chapitre III) simple de fluage suivante

$$\frac{l}{E(t_0, t)} = \frac{l}{E} + \left(\frac{l}{K} - \frac{l}{E} \right) [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]$$

nous aurons le moment comme suit (formule III-67)

$$M(t) = \left(1 - \frac{K}{E} \right) [1 - e^{-\beta(t-t_0)}] \sum_i M^{i*} e^{-\beta(t_0-t_i)}$$

$$\text{avec } \frac{K}{E} = \frac{1}{3} \quad \text{et } t_i < t_0 < t$$

M^{i*} : moment à la clé produite dans le système hyperstatique sous l'action extérieure, t_0 : date de clavage ; t_i :

date de mise en contrainte.

quand $t \rightarrow \infty$, nous avons

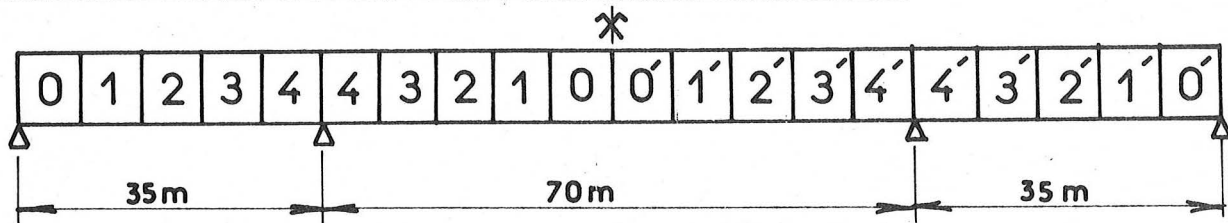
$$M(\infty) = \frac{2}{3} \sum_i M^{i*} e^{-\beta(t_0 - t_i)}$$

β : coefficient caractéristique de la vitesse de fluage .

Nous prenons la valeur

$$\beta = 0,006 \text{ (le temps est en jours).}$$

Les caractéristiques du pont de Champigny s/Yonne



$$q = 16,9 \frac{t}{m.}$$

$$ql^2 = 20702,5 \text{ t.m}$$

pour les voussoirs 4, 4', 3 et 3'

$$q = 14,4 \frac{t}{m.}$$

$$ql^2 = 17640 \text{ t.m}$$

pour les autres voussoirs

Nous partageons M^{i*} en deux parties dues aux câbles et au poids propre.

$$M^{i*} = M^C (\text{câbles}) + M^C (\text{voussoir})$$

Nous calculons M^{i*} sous la forme du tableau suivant :

1ère étape : Calcul de l'intervalle de temps séparant la mise en précontrainte de chaque voussoir et la date de clavage.

2ème étape : Calcul des coefficients de la loi exponentielle.

Calcul de l'âge de chaque voussoir jusqu'au moment du clavage	Voussoirs	4	3	2	1	0
		4'	3'	2'	1'	0'
$t_o - t_i$ en jours		230	190	170	160	150
		130	110	100	70	50
$e^{-\beta(t_o - t_i)}$		0,2516	0,3198	0,3606	0,3829	0,4066
		0,4584	0,5169	0,5488	0,6571	0,7408
SOMME		0,7100	0,8367	0,9094	1,0400	1,1474
Calcul des moments (voussoirs)	M_C^* (voussoirs)	9,75	66,25	173,75	326,25	517,75
	$\frac{10^{-4} \times q l^2}{}$					
	$q l^2$ en t - m	20702,5	20702,5	17640,00	17640,00	17640,00
Calcul des moments (câbles)	M_C^* (voussoirs) en t - m	20,18	137,15	306,50	575,51	913,11
	$\frac{M_C^*}{(Fe)_1}$ (câbles)	- 0,0825	- 0,1800	- 0,2925	- 0,3825	- 0,5625
	$(Fe)_1$	1518,7	1008,0	1048,3	719,0	179,8
effet des voussoirs	M_C^* (câbles) en t - m	- 125,29	- 181,44	- 306,63	- 275,02	- 101,14
	M_C^* (vous.) $e^{-\beta(t_o - t_i)}$ en t - m	14,33	114,75	278,73	598,53	1047,70
effet des câbles	M_C^* (cab.) $e^{-\beta(t_o - t_i)}$ en t - m	88,96	- 151,81	- 278,85	- 286,02	- 116,05
						- 921,69

3^e et 4^e étape : calcul des moments M_i^*

donc $M_c^* = 2054,04 - 921,69 = 1132,35 \text{ t-m}$.

$$(M_c^* = \sum_i M_i^* e^{-\beta(t_0-t_i)})$$

d'où

$$M(\infty) = \frac{2}{3} M_c^* = 754,90 \text{ t-m}$$

$$R(\infty) = \frac{M(\infty)}{35} = 21,56 \text{ t}$$

Soit une augmentation de réaction sur chaque culée de 21,56 t et une diminution de 21,56 t sur pile.

Il est intéressant de savoir que la conséquence de l'imprécision sur le coefficient β n'est pas tellement grave pour la redistribution à cause de l'antagonisme des moments créés par des câbles et par le poids propre.

Juste après le clavage, on dénivelle simultanément les deux appuis sur culées en exerçant une réaction valant au temps t_0 : $R(t_0)$ de façon que la sollicitation soit la même aux temps t_0 et au temps final t_∞ .

Temps	t_0 (clavage)	t (quelconque)	t_∞
Valeur de la réaction de réglage $R^d(t)$	$R^d(t_0)$ inconnue	$\frac{1}{3} R^d(t_0) \left[1 + 2 e^{-3\beta(t-t_0)} \right]$ voir formule III-61	$\frac{1}{3} R^d(t_0)$
Valeur de la réaction d'adaptation par fluage $R^f(t)$	0	$\frac{2Mc^*}{3l} \left[1 - e^{-3\beta(t-t_0)} \right]$ voir formule III-67	$\frac{M(\infty)}{l}$

D'après l'hypothèse, la somme de la réaction de réglage et de la réaction d'adaptation par fluage doivent être égales au temps t_0 et au temps final t_∞ , ce qui s'écrit :

$$R^d(t_0) = \frac{1}{3} R^d(t_0) + \frac{M(\infty)}{l}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{2 R^d(t_o)}{3} = + 21,56$$

$$R^d(t_o) = 1,5 \times 21,56 = 32,34 \text{ t}$$

On peut remarquer que cette condition est satisfaite non seulement pour t_o et t_∞ mais pour un temps quelconque.

$$\text{En effet} \quad \frac{1}{3} R^d(t_o) \left[1 + 2 e^{-3\beta(t-t_o)} \right] + \frac{2}{3} \frac{M_c^*}{\ell} \left[1 - e^{-3\beta(t-t_o)} \right] = R^d(t_o)$$

$$\text{si} \quad \frac{2}{3} \frac{M_c^*}{\ell} = \frac{2}{3} R^d(t_o)$$

Effectivement, le pont a été dénivélé après clavage, de telle manière que la variation de réaction hyperstatique soit nulle. Mais après la première année de mesures, une variation de réaction de 8 t a été constatée. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit une nouvelle méthode.

VI.2.3. Calcul de la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la théorie du fluage linéaire du béton et de la relaxation des aciers combinés.

VI.2.3.1. Données

- 1) $E_a = 21000 \text{ hbars} = 2142000 \text{ kg/cm}^2$
- 2) $E_b = 400 \text{ hbars} = 408000 \text{ kg/cm}^2$
- 3) $\sigma_{ca} = 0,55 R_G = 8635 \text{ kg/cm}^2$
- 4) $R_G = 157 \text{ kg/mm}^2 = (\text{Page 7, Fascicule n° 67-9 bis})$
 $KA 40 \quad S = 155 \text{ mm}^2$
 Effort de rupture 243,66 t
- 5) portées : 35 m - 75 m - 35 m (voir figure V-1)
- 6) Date de construction des éléments du caisson (voir figure V-2)
- 7) Loi rhéologique des câbles (système KA)

$$\Delta\sigma(t) = K \frac{at^n}{1 + at^n} \quad (t \text{ en heures})$$

$$\begin{array}{lcl} \text{ou } K = 25,07 &) & \\ n = 0,382 &) & \text{Coefficients trouvés par} \\ a = e^{k_2} = 0,0206 &) & \text{le laboratoire.} \\ k_2 = -3,88 &) & \end{array}$$

d'où

$$\Delta\sigma(t) = \frac{0,15338327 t^{0,382}}{1 + 0,0061182 t^{0,382}} \quad (t \text{ en jours})$$

en kg/mm^2

8) Coefficient de relaxation des armatures actives (câbles)

$$\psi(t) = \frac{\Delta\sigma(t)}{\sigma_a(o) - \sigma_{ca}}$$

$$\sigma_a(o) = 0,85 R_G$$

d'où

$$\psi(t) = \frac{0,15338327 t^{0,382}}{47,1 + 0,2817 t^{0,382}} \quad (t \text{ en jours})$$

9) Loi rhéologique du béton

$$\varphi(t, t_o) = \alpha k_1(t_o) k_2(t - t_o) \quad (t \text{ en jours})$$

$$\alpha = \varnothing_c \alpha_f \beta_f = 1,43$$

$$\varnothing = 2 \text{ (humidité relative } \sim 80 \%)$$

$$\alpha_f = 0,65 \text{ (rayon moy. } \sim 21 \text{ cm)}$$

$$\beta_f = 1,10 \text{ (E/C = 0,5 } C = 400 \text{ kg/m}^3)$$

La fonction $k_2(t)$ exprimant le développement de la déformation différée en fonction du temps est donné, dans le règlement, par une courbe. Nous proposons de la représenter sous la forme suivante :

$$k_2(t) = \frac{t_f}{at_f + b}$$

$$\frac{t_f}{k_2(t)} = at_f + b$$

L'instruction provisoire "conception et calcul du béton pré-contraint de 1973" indique les valeurs suivantes (page 189) :

$$t_f = 28 \text{ jours} \quad k_2 = 0,42$$

$$t_f = 5 \text{ ans} = 1825 \text{ jours} \quad k_2 = 0,94$$

$$\text{d'où} \quad a = 1,0433$$

$$b = 37,4665$$

Vérification

Jours	k_2 calculés	k_2 réels	erreurs en %
28 ~ 1 mois	0,42	0,42	0
90 = 3 mois	0,685	0,62	3,7
730 = 2 ans	0,914	0,89	2,7
1460 = 4 ans	0,935	0,92	1,6
1825 = 5 ans	0,94	0,94	0

par conséquent nous pensons que la formule utilisée est assez proche de la réalité.

Pour tenir compte de la dimension de la pièce, on introduit dans le diagramme des règlements français, au lieu du temps réel t , le "temps fictif" donné par l'expression

$$t_f = t \sqrt{\frac{10}{c_f}}$$

$$\text{d'où } t_f = t \sqrt{\frac{10}{21}} = 0,69 t$$

on a donc :

$$k_2(t) = \frac{0,69 t}{0,71988 t + 37,4665} \quad (t \text{ en jours})$$

Fonction $k_1(t_0)$

La formule $k_1(t_0)$ dépend du durcissement du béton à l'âge de la mise en charge. Il est défini par le diagramme de la page 191 de l'instruction provisoire de 1973 "conception et calcul du béton précontraint" en fonction de l'âge t du béton à la mise en charge.

Nous admettons, à titre d'approximation, que le diagramme donnant $K_1(t_0)$ en fonction du logarithme du temps est linéaire entre les abscisses correspondant à 7 jours et 365 jours, soit 1 semaine et 52 semaines environ, d'où la formule :

$$k_1(t_0) = a \log t_0 + b \quad (t_0 \text{ en semaines})$$

$$t_0 = 1 \text{ semaine} \quad k_1 = 1,4$$

$$t_0 = 52 \text{ semaines} \quad k_1 = 0,50$$

$$\text{donc } b = 1,4$$

$$a = -0,52448$$

$$\text{d'où } k_1(t_0) = -0,52448 \log \frac{t_0}{7} + 1,4 \quad (t_0 \text{ en jours})$$

Vérification

Jours	K_1 calculés	K_1 réels	erreurs en %
7	1,40	1,4	0
14	1,24	1,2	3,3
28	1,08	1,0	8,0
90	0,75	0,75	9,3
180	0,60	0,6	10,0
360	0,50	0,5	0

Discussion :

Bien que l'erreur soit assez grande pour certaines périodes, nous retiendrons cette formule. Bien entendu nous pouvons aussi considérer le diagramme comme étant une droite entre 1 semaine et 26 semaines. Celle-ci nous conduit à une erreur trop grande pour une période inférieure à 26 semaines. Une autre méthode permettant de diminuer les erreurs est de séparer le diagramme en plusieurs tronçons. Nous ne l'avons pas fait par souci de simplification.

d'où

$$\varphi(t_1, t_0) = 1,43 \left(-0,52448 \log(0,14286 t_0) \right) + 1,4 \times \frac{0,69 (t - t_0)}{0,71988 (t - t_0) + 37,4665}$$

$$10) \quad \beta = \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_a(o)} = \frac{\sigma_{ca}}{0,85 R_G}$$

$$\text{d'où} \quad \beta = \frac{86,35}{0,85 \times 157} = 0,647 \quad \text{Sans unité}$$

11) Loi du retrait du béton

$$\epsilon_r(t, t_0) = \epsilon_r r(t) - r(t_0)$$

$$\text{où} \quad \epsilon_r = k_b \epsilon_c K_{ei} K_p$$

$$K_b = 1,24 \quad (\text{pour } E/c = 0,5, \quad c = 400)$$

$$\epsilon_c = 21 \times 10^{-5} \quad (80 \% \text{ humidité relative de l'air})$$

$$K_{ei} = 0,78 \quad (\text{épaisseur fictive 21 cm})$$

$$K_p = \frac{1}{1 + n\omega}$$

$n = 20$: eu égard à l'influence du fluage

$\omega = \frac{A}{B}$: le coefficient K_p dépend du pourcentage des armatures $\omega = \frac{A}{B}$, rapport de la section des armatures longitudinales de toute nature (à condition qu'elles soient adhérentes) à la

section transversale de la pièce.

Dans le cas du pont de Champigny s/Yonne :

$$\text{section moy. : } B = \frac{3,05 + 3,45}{2} = 3,25 \text{ m}^2$$

section des câbles sur appuis :

$$\begin{aligned} 2KA \ 20 &= 2 \times 776 = 1152 \text{ mm}^2 \\ 24KA \ 40 &= 24 \times 1552 = 37248 \text{ mm}^2 \\ &38800 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \omega = \frac{38800}{3,25 \times 10^6} = 1,169 \times 10^{-2}$$

(ici on néglige les armatures passives)

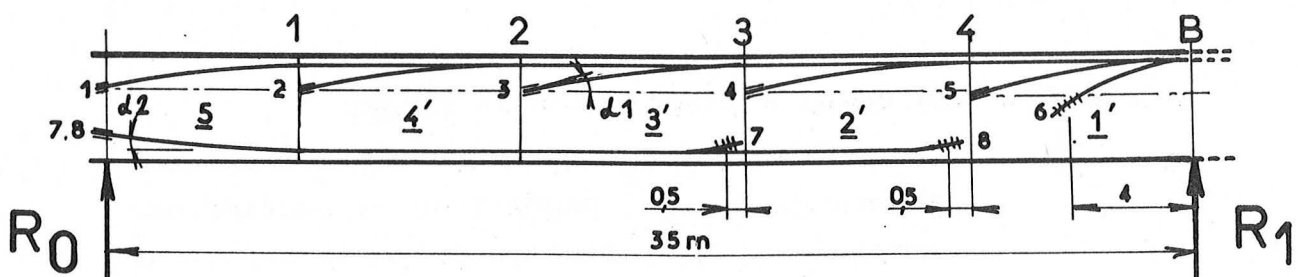
$$\text{d'où } K_p = \frac{1}{1 + 20 \times 1,169 \times 10^{-2}} = 0,8105$$

$$\text{et } \epsilon_r = 1,24 \times 21 \times 10^{-5} \times 0,78 \times 0,8105 = 0,0001646$$

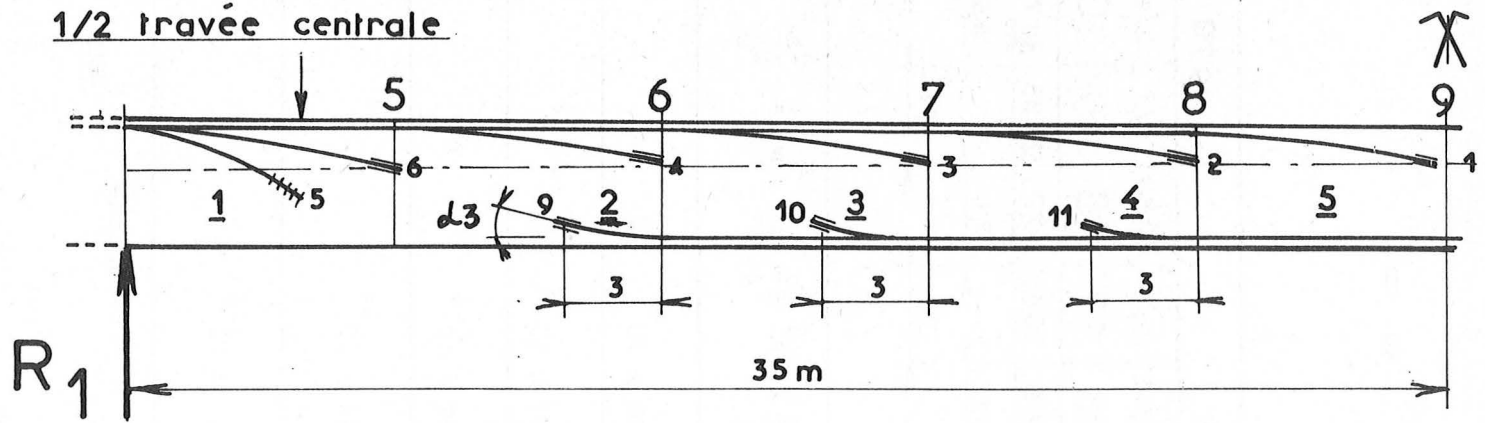
$$\text{d'où } \epsilon_r (t_1 \ t_0) = 0,0001646 \frac{0,69 \ t}{0,71988 \ t + 37,4665} - \frac{0,69 \ t_0}{0,71988 \ t_0 + 37,4665}$$

t en jours

12) Schéma de cablage.



1/2 travée centrale



1 2 KA 20
2 4 KA 40
3 6 KA 40
4 6 KA 40
5 4 KA 40
6 4 KA 40

7 2 KA 40
8 2 KA 40
9 4 KA 40
10 4 KA 40
11 4 KA 40

$\alpha 1$ 20°
 $\alpha 1$ 12° (moy.)
 $\alpha 3$ 9°

13) Coefficients de souplesse du pont :

Pour éviter la complexité du programme principal de calcul de "fluage - relaxation combinés", nous avons pré-établi un programme qui calcule les coefficients de souplesse des ponts. Pour le pont de Champigny, nous avons trouvé :

$$A_2 = 2,6912 \text{ m}^{-3}$$

$$B_2 = 1,4539 \text{ m}^{-3}$$

$$C_1 = 1,3027 \text{ m}^{-3}$$

d'ou les coefficients de souplesse

$$a_2 = \frac{A_2}{E} = 6,59755 \times 10^{-12} \text{ (kg. cm)}^{-1}$$

$$b_2 = \frac{B_2}{E} = 3,56348 \times 10^{-12} \text{ (kg. cm)}^{-1}$$

$$c_1 = \frac{C_1}{E} = 3,19289 \times 10^{-12} \text{ (kg. cm)}^{-1}$$

Etant donné que le pont est symétrique, nous avons : $C_1 = a_3$ $a_2 = C_2$

d'où $b_2^2 - (C_1 + a_2)^2 = -83,15433 \times 10^{-24} \text{ (kg. cm)}^{-1}$ $(C_1 + a_2) = 9,79044 \times 10^{-12} \text{ (kg. cm)}^{-1}$

14) Calcul des coefficients K_a

1969										1970		1969						1970	
10/26	10/12	9/30	9/13	7/30	7/30	9/13	9/30	10/12	10/26	2/1	1/7	12/14	12/1	11/12	11/12	12/1	12/14	1/7	2/1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
33	1015	1725	2435	3145	355	1065	1775	2485	3170	3830	4515	5225	5935	6645	355	1065	1775	2485	3170
05	71	71	71	71	71	71	71	61	05	05	71	71	71	71	71	71	71	71	06
66	71	71	71	71	71	71	71	71	05	61	71	71	71	71	71	71	71	71	05

Sections :	S_a en m^2	S_b brut : en m^2	e : en m	e^2 : en m^2	I_b brut : en m^4	$e^2 \frac{S_b}{I_b}$	$\frac{S_a}{S_b} \times 10^6$	$k_a = \frac{S_a}{S_b} (1 + e^2 \frac{S_b}{I_b})$	$m_a, m_a = \frac{E_a}{E_b}$
1	2K A20 $2 \times 776 = 1552 \times 10^{-6}$	5,74	1,07	1,1449	7,46	0,88093	508,572	$26,700 \times 10^{-6}$	
2	4K A40 $4 \times 1552 = 6208 \times 10^{-6}$	5,74	1,07	1,1449	7,46	0,88093	$\frac{1081,533}{1351,916}$	$133,500 \times 10^{-6}$	
3	6K A40 $6 \times 1552 = 9312 \times 10^{-6}$	5,74	1,04	1,0816	7,46	0,83222	$\frac{1622,300}{2974,216}$	$286,095 \times 10^{-6}$	
4	6K A40 $6 \times 1552 = 9312 \times 10^{-6}$	5,74	1,00	1,0000	7,46	0,76944	$\frac{1622,300}{4596,516}$	$426,996 \times 10^{-6}$	
5	8K A40 $8 \times 1552 = 12416 \times 10^{-6}$	6,74	1,13	1,2769	9,72	0,88542	$\frac{1842,137}{6438,653}$	$637,327 \times 10^{-6}$	

- 1) Les voussoirs 1, 2, 3, 4, 5 et 10, 9, 8, 7, 6 respectivement sont symétriques par rapport à la pile gauche.
- 2) Le pont est symétrique par rapport au milieu de la travée centrale.

NOTA

Ligne de précontrainte $e_{oo}(x)$:

a) Nous savons qu'une ligne funiculaire des charges est une ligne de précontrainte. En effet cette ligne a pour ordonnée :

$$e_{oo}(x) = \frac{M(x)}{F} \quad M \text{ étant le moment dû aux charges et surcharges.}$$

Donc la relation de concordance :

$$J[e_{oo}(x)] = \int_0^{l_1} \frac{x}{l} \frac{M(x)}{I} dx + \int_0^{l_2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{M(x)}{I} dx = 0$$

est vérifiée, car cette relation s'identifie avec la relation de continuité de la poutre au droit de l'appui A_1 c'est-à-dire avec l'égalité des rotations des travées $A_0 A_1$ et $A_1 A_2$ au droit de A_1 :

$$\Omega''_{A_0 A_1} = - \int_0^{l_1} \frac{x}{l} \frac{M}{EI} dx = \Omega'_{A_1 A_2} = + \int_0^{l_2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{M}{EI} dx$$

b) Or nous avons :

$$e_1(x) = c - \frac{M_m}{F} = c - \frac{M_p + M_{s1}}{F} ; \quad c' = c ;$$

$$e_2(x) = -c' - \frac{M_m}{F} = -c' - \frac{M_p + M_{s2}}{F} .$$

(M_{Si} = moment dû à la surcharge dans la travée $i = 1, 2$)

La ligne $e(x) = \frac{e_1(x) + e_2(x)}{2}$ est une ligne funiculaire de la charge $p + \frac{S}{2}$. En effet d'après le premier tableau les cas de charges correspondant à M_m et M_M sont complémentaires, la charge unitaire restant la même. Ainsi pour obtenir M_M et M_m à mi-travée, les surcharges sont placées respectivement comme suit :

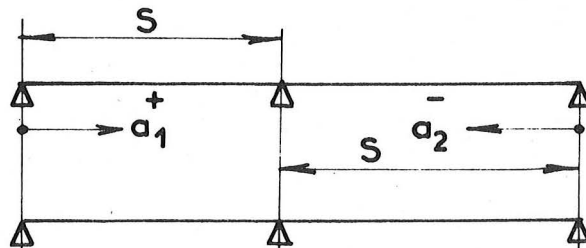


FIG. VI-7

Donc :
$$\frac{M_{s1} + M_{s2}}{2} = \frac{M_s}{2}$$



FIG. VI-8

et
$$e(x) = - \frac{M_P + M_{s/2}}{F}$$
 . Nous prendrons donc comme ligne de

précontrainte $e_{oo}(x) = e(x)$ puisque par ailleurs $e(x)$ est à l'intérieur du fuseau limite.

Les ordonnées de $e_{oo}(x)$ sont données dans le tableau 1.

Tracé du câble :

Nous voyons que le câble réel ne peut pas s'identifier à la ligne de précontrainte car cette dernière sort de la poutre à proximité de la section 16. Nous ne pouvons donc pas adopter un câble concordant. Faisons pivoter la ligne de précontrainte autour du centre de gravité G de la section $x = 0$ de façon à l'abaisser de $e = -0,170$ m au droit de la section 16.

La ligne $e_c(x)$ se déduit de $e(x)$ par la transformation linéaire :

$$e_c(x) = e_{oo}(x) + \Delta e \frac{x}{l}$$

d'où les ordonnées de $e_c(x)$ (voir tableau n° 2)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(en m)																	
e _{oo}	0	-0,103	-0,188	-0,253	-0,300	-0,328	-0,338	-0,328	-0,300	-0,253	-0,188	-0,103	0	+0,122	0,263	+0,376	0,600
(en m)																	

TABLEAU N° 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\Delta e_x /$	0	-0,011	-0,021	-0,032	-0,043	-0,053	-0,064	-0,074	-0,085	-0,096	-0,106	-0,117	-0,128	-0,138	-0,149	-0,159	-0,170
(m)																	
e _c (x)	0	-0,114	-0,209	-0,285	-0,343	-0,381	-0,402	-0,402	-0,385	-0,349	-0,294	-0,220	-0,128	-0,016	+0,114	+0,217	+0,430
(m)																	

TABLEAU N° 2

Fuseau limite-Trace du câble. x

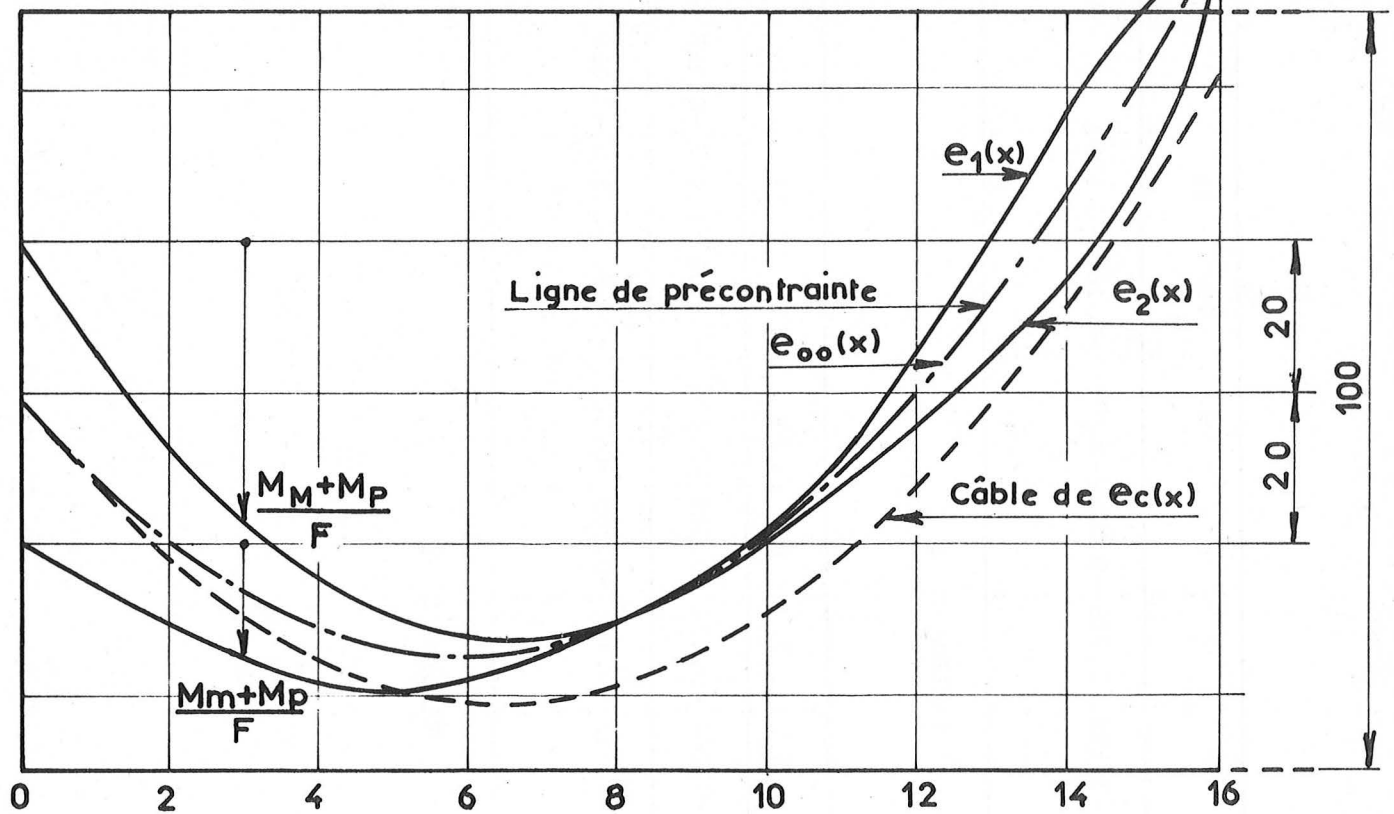


FIG. VI-9

Adoptons $e_c(x)$ pour tracé du câble, ce tracé étant à l'intérieur de la poutre avec un enrobage suffisant et montrons que ce câble admet pour ligne de précontrainte $e_{00}(x)$; à cette fin, calculons les moments hyperstatiques de précontrainte m_0, m_1, m_2 par la relation des 3 moments.

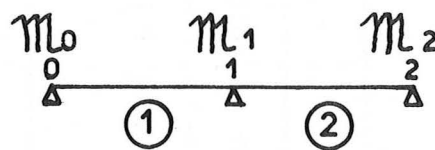


FIG. VI-10

$$b M_0 + (c + d) M_1 + b M_2 = \omega'_2 - \omega''_1$$

or $M_0 = M_2 = 0$ (sections d'extrémités libres)

$$M_1 = \frac{\omega'_2 - \omega''_1}{c + d}$$

$$d = c = \frac{l}{3EI} ; \quad \omega'_2 = + \int_0^{l_2} \frac{x}{l_2} F e_c(x) \frac{dx}{EI}$$

$$\omega''_1 = - \int_0^{l_1} \frac{x}{l_1} F e_c(x) \frac{dx}{EI}$$

or $e_c(-\frac{x_2}{l}) = e_c(\frac{x_1}{l})$ symétrie donc $\omega''_1 = \omega'_2$

Par suite

$$M_1 = \frac{- \int_0^l \frac{x}{l} F e_c(x) \frac{dx}{EI}}{l/3EI} = - \frac{3}{l} \int_0^l F \frac{e_c(x)}{l} x dx$$

$$M_1 = - 3F \int_0^l \frac{x}{l} e_c(x) \frac{dx}{l} : \quad \text{On pose :}$$

$$K = - 3 \int_0^l \frac{x}{l} e_c(x) \frac{dx}{l}$$

L'intégration de K donne :

$$K = - 3 \int_0^l \frac{x}{l} e_c(x) \frac{dx}{l} = - 3 \int_0^l \frac{x}{l} e_{00}(x) \frac{dx}{l} - 3 \int_0^l \Delta e \left(\frac{x}{l} \right)^2 dx$$

La première intégrale est nulle car elle représente la relation de concordance pour la ligne de précontrainte. Donc :

$$K = -3 \int_0^l \Delta e \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = -\Delta e \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]_0^l = -\Delta e$$

$$\text{et : } \mathcal{M}_1 = -F \Delta e$$

De sorte que le moment total de précontrainte vaut :

$$M_o(x) = F e_c(x) + \mathcal{M}(x) = F e_c(x) + \frac{x}{l} \mathcal{M}_1$$

et la ligne de précontrainte du nouveau tracé a pour équation dans la travée 01 :

$$e'_{oo}(x) = \frac{M_o(x)}{F} = e_c(x) + \frac{x}{l} \frac{\mathcal{M}_1}{F}$$

$$e'_{oo}(x) = e_{oo}(x) + \Delta e \frac{x}{l} - \frac{x}{l} \Delta e$$

$$e'_{oo}(x) = e_{oo}(x)$$

Le nouveau tracé du câble conserve la ligne de précontrainte et permet un enrobage suffisant du câble.

En revanche il développe une réaction d'appui hyperstatique de précontrainte sur l'appui 01 :

$$R_1 = \frac{\mathcal{M}_2 - \mathcal{M}_1}{l} + \frac{\mathcal{M}_o - \mathcal{M}_1}{l}$$

$$R_1 = -2 \frac{\mathcal{M}_1}{l}$$

$$R_1 = 2 \frac{F \Delta e}{l} = \frac{2 \times 80 \times (-0,170)}{16} \text{ t}$$

$$R_1 = -1,7 \text{ t}$$

Il s'agit d'une réaction de soulagement de l'appui central qui par raison de symétrie se traduit par les appuis 0 et 2 par les réactions supplémentaires :

$$R_0 = R_2 = - \frac{R_1}{2} = +0,85 \text{ t}$$

Toutefois, le tracé envisagé pour le câble présente un point anguleux sur l'appui 1 qui est irréalisable. Cependant nous admettons ce tracé pour calculer la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la nouvelle méthode.

Réaction hyperstatique due au poids propre

Etant donné que le moment sur appui 1 est de -32 t.m, la portée est de 16 m et le poids propre est de une tonne par mètre linéaire, nous avons :

$$R_0^p \times 16 - 1 \times 16 \times \frac{16}{2} = -32$$

avec R_0^p : réaction d'appui
zéro (poids propre)

$$\text{d'où } R_0^p = 6^t$$

	: appui 0 en t	: appui 1 en t	: appui 2 en t	: total en t
Réaction due au poids propre en t	+ 6,00	+ 20,00	+ 6,00	+ 32,00
Réaction due à la précontrainte non concordante	+ 0,85	- 1,70	+ 0,85	+ 0
TOTAL	+ 6,85	+ 18,30	+ 6,85	+ 32

VI-1.2. Calcul de la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la théorie du fluage linéaire du béton et de la relaxation
des aciers combinés

Sections t en m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
(0) Positions des câbles en m	-0,114	-0,209	-0,285	-0,343	-0,381	-0,402	-0,402	-0,385	-0,349	-0,294	-0,220	-0,128	-0,016	+0,114	+0,217	+0,430
(1) Moments dus au poids propre en t- m	+5,50	+10,00	+13,50	+16,00	+17,50	+18,00	+17,50	+16,00	+13,50	+10,00	+5,50	+ 0,0	-6,50	-14,00	-22,50	-32,00
(2) Moments dus à la non concordance des câbles en t - m	0,85	+1,70	+ 2,55	+3,40	+ 4,25	+5,10	+ 5,95	+6,80	+7,65	+8,50	+9,35	+10,20	+11,05	+11,90	+12,75	+13,60
(3) = (0) x 80 x α Moments dus à l'excentre- ment des câbles en t - m	-9,12	-16,72	-22,80	-27,44	-30,48	-32,16	-32,16	-30,80	-27,92	-23,52	-17,60	-10,24	-1,28	+ 9,12	+17,36	+34,40
(1) + (2) + (3) en t - m	-2,77	-5,02	-6,75	-8,04	-8,73	-9,06	-8,71	-8,00	-6,77	-5,02	-2,75	- 0,04	-3,27	+7,02	+7,61	+16,00
e^2 m ²	0,012966	0,081225	0,145161	0,161604	0,121801	0,048400	0,000256	0,047089	0,184900							
$1 + e^2 \frac{S_p}{I_b}$	1,155952	1,974700	2,741930	2,939240	2,461610	1,580800	1,003072	1,565068	3,218800							
$M(\frac{9T}{52} \frac{e}{d} + 1) \frac{9S}{52}$	117,733711	155,236715	201,123195	245,640608	279,265571	299,362409	299,361594	283,010595	250,714979	207,492079	161,004480	121,874529	102,162883	117,733711	159,402176	327,834780

$$\frac{9T}{52} \frac{e}{d} = \frac{9 \times 0,114}{52 \times 0,40} = \frac{9 \times 0,114}{20,8} = \frac{1,026}{20,8} = 0,049327$$

$$M = \frac{\omega'_2 - \omega''_1}{e + a}$$

$$c = a = \frac{l}{3 E_b I_b} = \frac{16 \times 10^2}{3 \times 408000 \times 3333333} = 0,3921569 \times 10^{-9} \text{ Kg cm}^{-1}$$

$$I_b = \frac{b h^3}{12} = \frac{40 \times 10^6}{12} = 3333333 \text{ cm}^4$$

$$\omega''_1 = \int_0^l \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \frac{\Delta \varepsilon_b}{e} dx$$

$$\omega'_2 = \int_0^l \frac{x}{l} \frac{\varepsilon_b}{e} dx$$

Nous avons pris 10 intervalles, soit 2 m. par intervalle.

ε_b est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_b^x = & \Delta \varepsilon_b^0(x) [A(x, t_i, t_0) - A(x, t_c, t_0)] + \\ & + [\varepsilon_\gamma(t_i, t_0) - \varepsilon_\gamma(t_c, t_0)] [B(x, t_i, t_0) - B(x, t_c, t_0)] + \\ & - a(x) \sum_{k=1}^{k=i-1} [M_0(x) \cdot C(x, t_i, t_c) - M_k \cdot C(x, t_i, t_k)] \end{aligned}$$

$$\text{où } \Delta \varepsilon_b^0 = \frac{k_a \sigma_a(0)}{E_a} ; \quad a = \frac{e}{E_b I_b}$$

$$A = \frac{\varphi - (1-\beta) \psi (1+\varphi)}{1 + K_a (1+\varphi)(1-\varphi)}$$

$$B = \frac{1}{1 + K_a (1+\varphi)(1-\psi)}$$

$$C = \frac{\varphi - K_a (1+\varphi) \psi}{1 + K_a (1+\varphi)(1-\psi)} \frac{1}{1 + K_a}$$

φ, ψ sont définis au paragraphe VI-1.1.

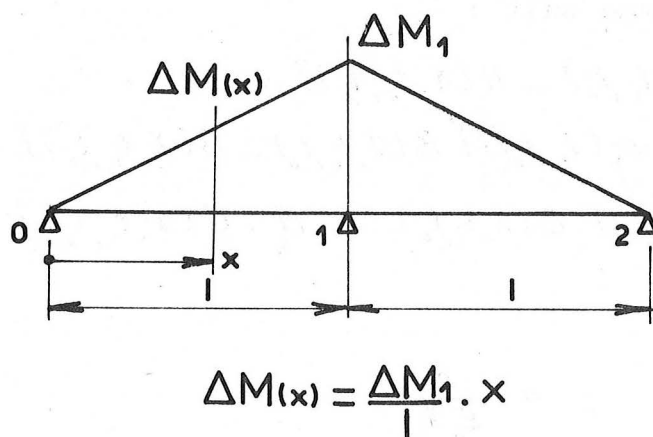
$K_a(x)$ est calculé dans le tableau précédant en prenant 8 intervalles soit 2 m. par intervalle. Il est considéré comme donné pour le programme.

t_0 : temps de la mise en précontrainte de la section x , pour le cas précédent, t_0 est constant ($t_0 = 3$ jours).

t_c : temps de clavage. Etant donné que le pont est coulé sur cintre par conséquent t_c n'est pas pris en considération. ($t_c=3$ jours).

t_i : temps au i ème intervalle, nous avons pris 5 jours comme intervalle.

ΔM_k : moments successifs de redistribution, ils sont calculés comme suit :



le programme est fait de telle manière que ΔM s'ajoute à ΣM_k déjà calculé à l'itération précédente.

VI-1.3. Résultats obtenus

a) Réactions

Nous extrayons seulement ci-après les résultats obtenus (pas égal à 3 jours et pas égal à 5 jours) sur ordinateur.

Jours comptés à partir du décin- trement	Pas = 3 jours			Pas = 5 jours		
	$R_o = \frac{R_1}{2}$ en t	appuis de rive 6,85 + R_o en t	appui central $18,3-2R_o$ en t	$R_o = \frac{R_1}{2}$ en t	appuis de rive 6,85 + R_o en t	appui central $18,3-2R_o$ en t
	Valeurs cumu- lées dues au fluage	Valeurs fi- nales.	Valeurs fi- nales.	Valeurs cumu- lées dues au fluage.	Valeurs fina- les.	Valeurs fina- les.
33	0,76	7,61	16,8	0,75	7,60	16,8
63	1,29	8,14	15,7	1,27	8,12	15,8
93	1,68	8,53	14,9	1,66	8,51	15,0
123	1,97	8,82	14,4	1,95	8,80	14,5
153	2,21	9,06	13,9	2,18	9,03	13,9
183	2,40	9,25	13,5	2,37	9,22	13,6
213	2,55	9,40	13,2	2,52	9,37	13,3
243	2,68	9,53	12,9	2,65	9,50	13,0
273	2,78	9,63	12,7	2,75	9,60	12,8
303	2,87	9,72	12,6	2,84	9,69	12,6
333	2,95	9,80	12,4	2,92	9,77	12,5
363 (1 an)	3,01	9,86	12,2	2,98	9,83	12,3
393	3,07	9,92	12,3	3,04	9,89	12,2
423	3,12	9,97	12,1	3,09	9,94	12,1
453	3,16	10,00	12,0	3,13	9,98	12,0
483	3,20	10,00	11,9	3,17	10,00	12,0
513	3,23	10,10	11,8	3,20	10,10	11,90
543	3,17	10,00	12,0	3,23	10,10	11,80
633	3,34	10,20	11,6	3,31	10,20	11,70
747 (~ 2ans)	3,40	10,30	11,5	3,37	10,20	11,6
1053 (~ 3ans)	3,50	10,40	11,3	3,47	10,30	11,4
1460 (~ 4ans)				3,54	10,40	11,2

Nous traçons R_o et R , en fonction du temps et des pas pris dans le programme. Nous pouvons tirer les conclusions suivantes (figure VI-11).

1) La redistribution des efforts hyperstatiques est très forte pendant les 8 premiers mois (environ 77 %).

2) La redistribution des efforts commence à se stabiliser à partir de 540 jours, soit environ un an et demi.

3) D'après les courbes de la figure VI.2, nous constatons que quand les pas (en jours) pris en compte dans le programme diminuent la courbe des réactions redistribuées tend vers une limite, c'est-à-dire que la variation des efforts entre les courbes 3 et 2 pour le même jour est plus petite que celle entre les courbes 1 et 2. D'ailleurs la courbe 2 est pratiquement confondue avec la courbe 3.

C'est la raison pour laquelle nous conseillons de prendre un pas égal à 3 jours. Il est inutile dans ce cas de faire un programme dont les pas sont variables.

4) Temps de calcul

Le choix d'un pas égal à 3 jours permet d'attendre une précision suffisante. Le temps de calcul correspondant est de 15 minutes (ordinateur IRIS 80), et permet de déterminer les réactions redistribuées pour une durée de 3 ans et demi.

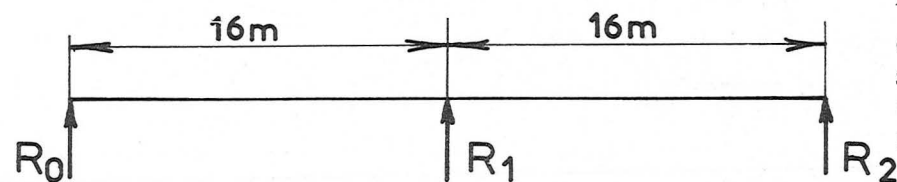
b) Moments

Il est intéressant de connaître la ligne représentative des moments hyperstatiques de redistribution. Nous donnons les résultats sous la forme du tableau n° 3 (pas = 3 jours).

Dans la figure VI-13, nous avons présenté l'évolution des moments fléchissants (poids propres, précontrainte, effet hyperstatique de la précontrainte) en fonction du temps (pas = 3 jours). Nous constatons que les moments changent de signe en fonction du temps et le moment sur appui après redistribution devient très grand. En effet nous n'avons pas compté les effets dus aux armatures passives. Si l'on en tient compte dans le calcul, l'effet de la redistribution sera surement diminué. En outre une poutre sous chaussée routière supporte dans la réalité des charges inférieures à la valeur prise dans le présent calcul. Par conséquent la précontrainte initiale choisie est sensiblement supérieure à ce qu'elle serait dans une poutre de pont. Ainsi les effets de la redistribution y seraient moins marqués.

Sections x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Moments initiaux en t-m	- 2,77	- 5,02	- 6,75	- 8,04	- 8,73	- 9,06	- 8,71	-8,00	- 6,77	- 5,02	- 2,75	- 0,04	+ 3,27	+ 7,02	+7,61	+16,00
Moments de redistribution (33 j)	0,76	1,52	2,28	3,04	3,80	4,56	5,32	6,08	6,84	7,60	8,36	9,12	9,88	10,64	11,40	12,16
Moments réels (33 j)	- 2,01	- 3,50	- 4,47	- 5,00	- 4,93	- 4,50	- 3,39	-1,92	0,07	2,58	5,61	9,08	13,15	17,66	19,01	12,92
Moments de redistribution (123 j)	1,97	3,94	5,91	7,88	9,85	11,82	13,70	15,76	17,73	19,70	21,67	23,64	25,61	27,58	29,55	31,52
Moments réels (123 j)	- 0,80	- 1,08	- 0,84	- 0,16	1,12	2,76	5,08	7,76	10,96	14,68	18,92	23,60	28,88	34,60	37,16	47,52
Moments de redistribution (363 j)	3,01	6,02	9,03	12,04	15,05	18,06	21,07	24,08	27,09	30,10	33,11	36,12	39,13	42,14	45,15	48,16
Moments réels (363 j)	0,24	1,00	2,28	4,00	6,32	9,00	12,36	16,08	20,32	25,08	30,36	36,08	42,40	49,16	52,76	64,16
Moments de redistribution (747 j)	3,40	6,80	10,20	13,60	17,00	20,40	23,80	27,20	30,60	34,00	37,40	40,80	44,20	47,6	51,00	54,40
Moments réels (747 j)	0,63	1,78	3,45	5,56	8,27	11,34	15,09	19,20	23,83	28,98	34,65	40,76	47,47	54,62	58,61	70,40

TABLEAU N° 3



Poids propre	+ 6,00t = R_0	
Câbles	+ 0,85t	
Somme	6,85t	$\frac{10,4-6,85}{6,85} = 51,82 \%$
t $\rightarrow \infty$	10,40t (pas=5jours)	
Redistribution	3,55t	

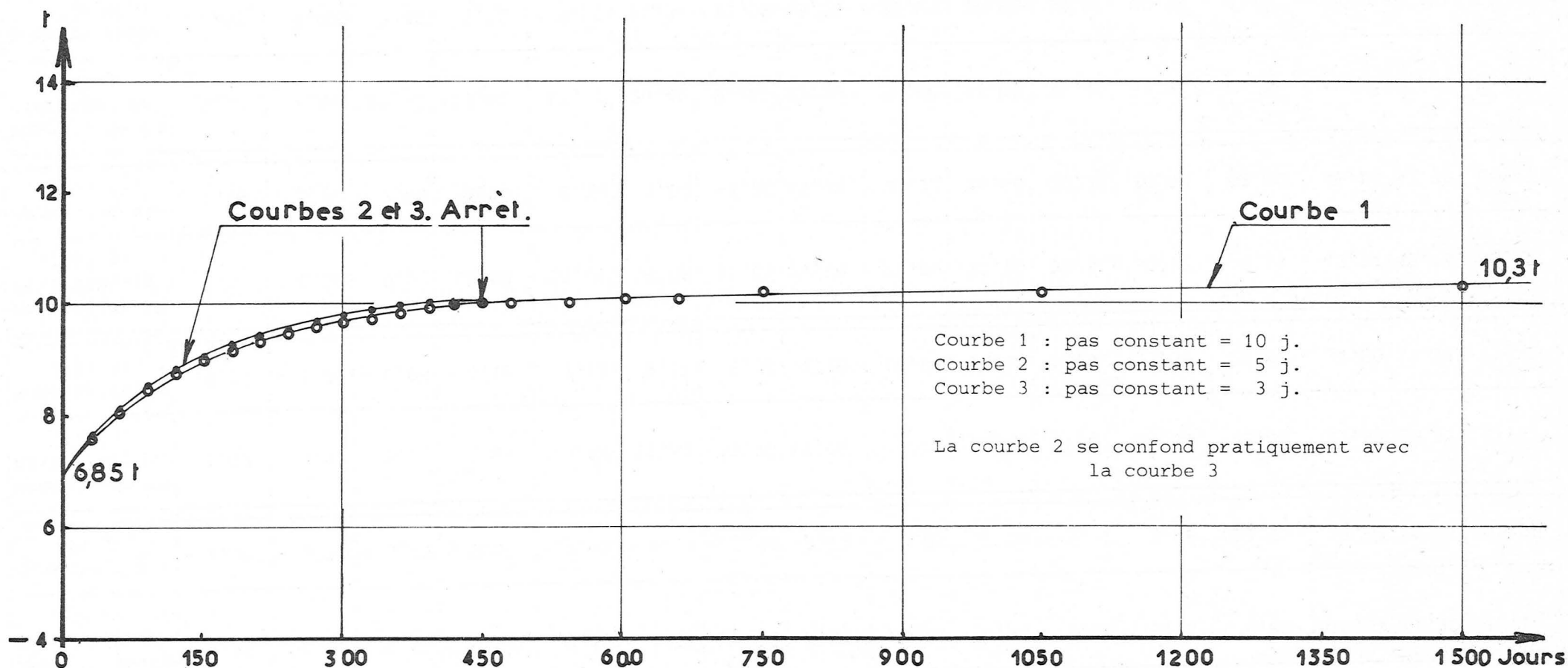
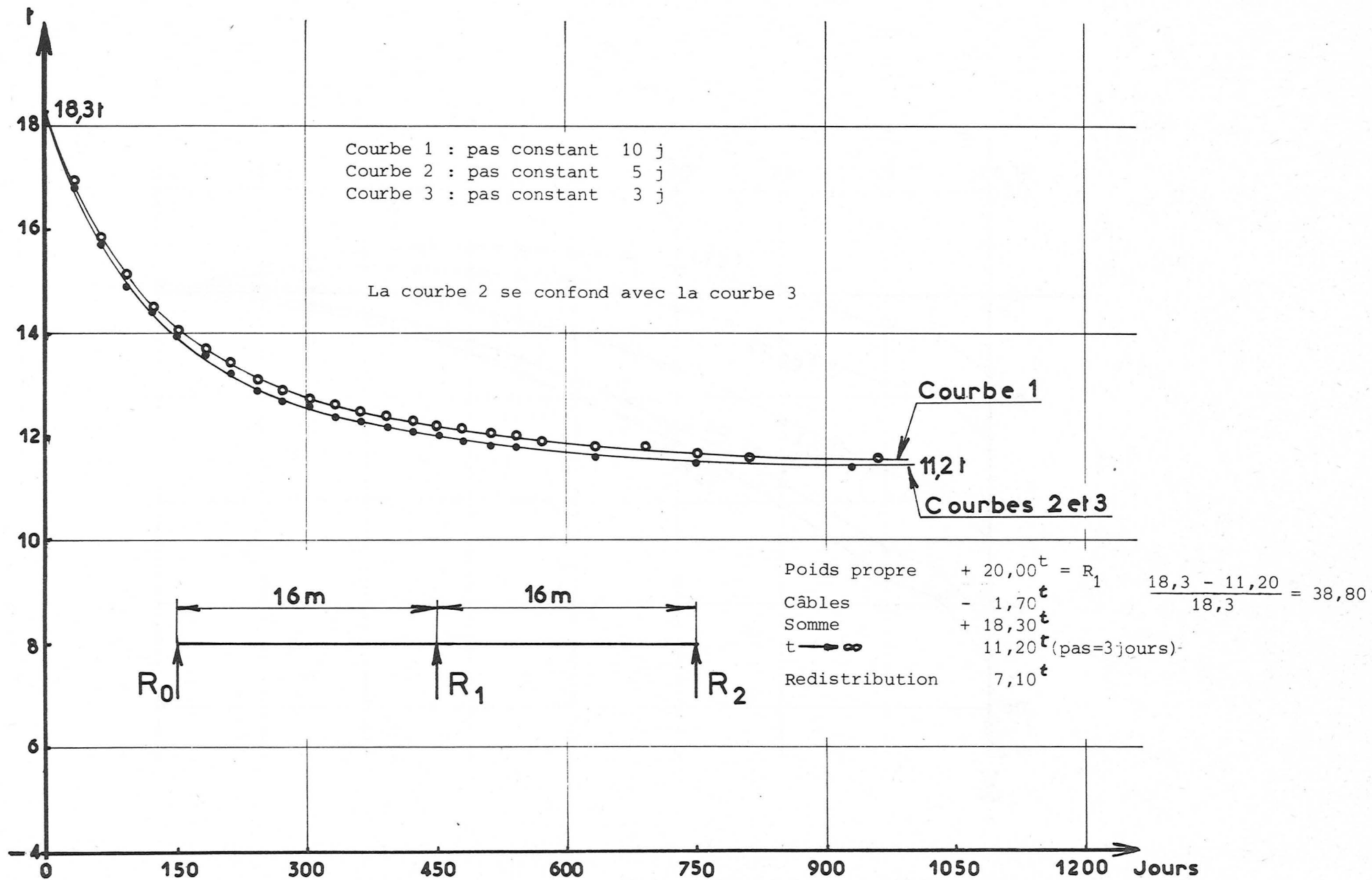
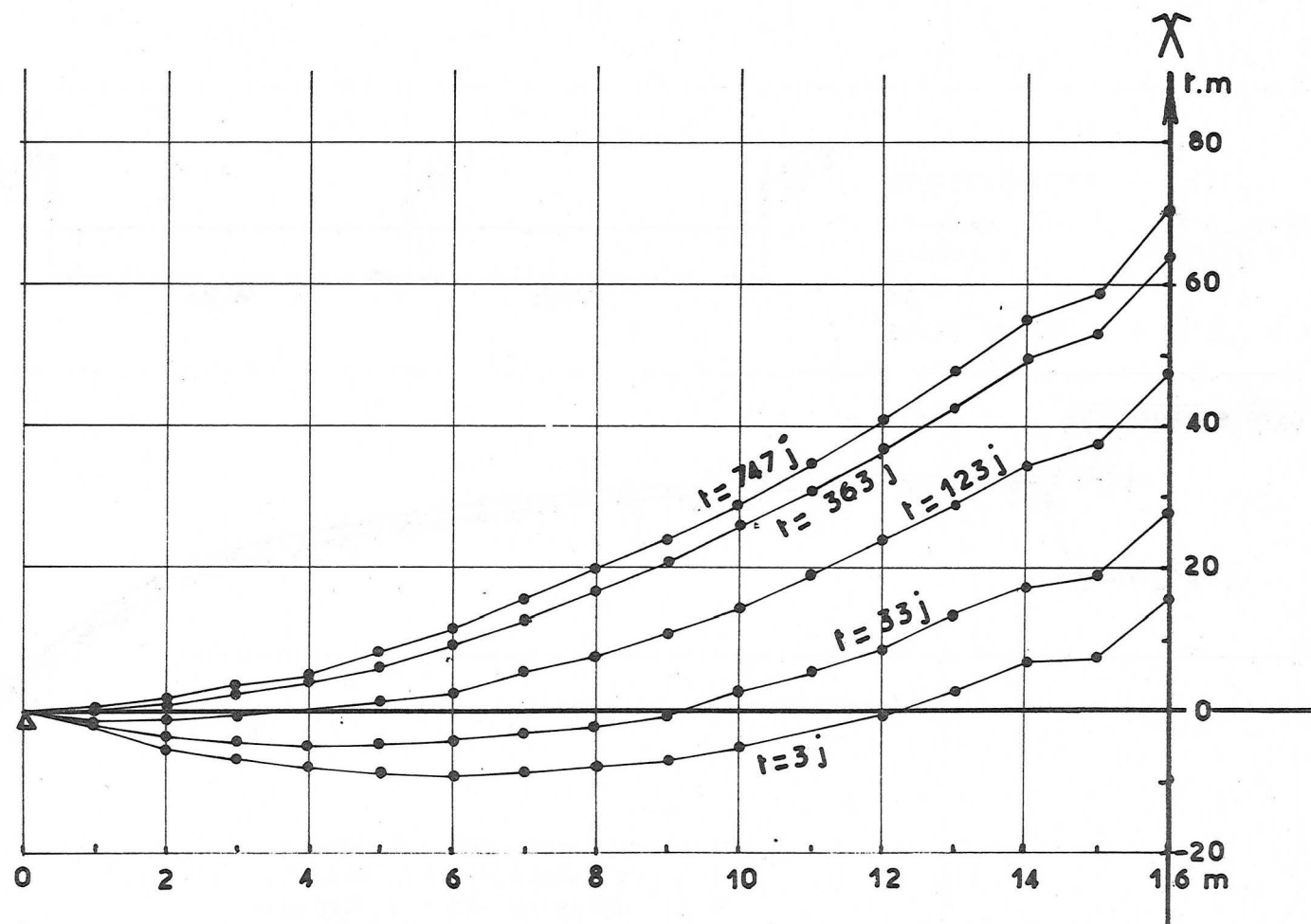


FIG. VI-11 - EVOLUTION DE REACTION D'APPUI R_0 EN FONCTION DU TEMPS ET DES PAS (EN JOURS) PRIS DANS LE PROGRAMME.


 FIG. VI-12 - EVOLUTION DE REACTION D'APPUI R₁ EN FONCTION DU TEMPS ET DES PAS (EN JOUPS) PRIS DANS LE PROGRAMME

(FIG. VI-13) - EVOLUTION DES MOMENTS FLECHISSANTS (poids propre - précontrainte - effet hyperstatique de la précontrainte) en fonction du temps (pas = 3 jours).



VI-1.4. Etude de la sensibilité des divers facteurs

a) Calcul des moments initiaux.

Pour un pont coulé sur cintre, si nous voulons avoir une précision raisonnable, nous devons partager la portée en 8 à 10 intervalles égaux. Si nous voulons avoir la même précision et un plus petit nombre d'intervalles, nous devons partager la portée en intervalles inégaux. Les intervalles seraient plus petits près des appuis à cause du relevage rapide des câbles.

Pour un pont construit en encorbellement, nous conseillons de prendre chaque voussoir comme un intervalle (voir VI-2.3.).

b) Loi de fluage

- Loi K_1

La loi K_1 dépend du durcissement du béton à l'âge de la mise en charge. Pour le programme dont les pas sont constants (3 jours) nous avons pris deux lois différentes de K_1 et comparé les résultats

$$K_1^1 = - 0,53 \log (0,143 t_o) + 1,4 \quad (\text{cas 1})$$

$$\text{et } K_1^2 = - 0,27 \log (0,143 t_o) + 1,4 \quad (\text{cas 2})$$

Nous avons trouvé :

Jours	Cas 1 R_o^1 en t	Cas 2 R_o^2 en t	Erreurs en % $\frac{R_o^1 - R_o^2}{R_o^1}$
30 (1 mois)	0,700	0,692	1,14
102	1,770	1,860	5,09
354 (1 an)	2,990	3,690	23,34
708 (2 ans)	3,380	4,620	52,10
1095 (3 ans)	3,510	5,020	43,02

à noter que quand $K = -0,53$, la formule K_1^1 proposée a déjà 10 % d'erreur par rapport à la courbe du règlement (voir VI-2.3., vérification de K_1 .)

Compte tenu de la possibilité d'effectuer les calculs sur ordinateurs, M. Fauchart a néanmoins préféré employer des représentations mises sous forme de rapports de polynômes dont le degré a été déterminé par le nombre de points de coïncidence avec la courbe représentée dans les recommandations FIP-CEB soit :

$$K_1(t_o) = \frac{-22264 + 3910,5 t_o + 163,5 t_o^2 + 0,2553 t_o^3}{-12479 + 1629 t_o + 211,6 t_o^2 + t_o^3}$$

nous pensons que la constante K de la fonction K_1 joue un rôle très important, il est conseillé de bien choisir ce chiffre. L'attention est à attirer sur la différence entre la constante K , représentant le degré d'approchement de la formule et de la courbe donnée par le règlement, et la fonction K_1 , représentant la date de mise en précontrainte.

c) Coefficient K_2

La loi K_2 exprime le développement de la déformation différée en fonction du temps. Pour le programme dont les pas sont constants (3 jours) nous avons pris deux lois différentes de K_2 et comparé les résultats.

$$K'_2 = \frac{0,69 (t - t_o)}{0,71988 (t - t_o) + 37,4665}$$

$$K_2^2 = 1 - e^{-0,006 (t - t_o)}$$

On peut trouver le détail de calcul des constantes K_2 au chapitre VI 2.3. La loi K_2^2 dont la courbe est nettement au-dessous de celle du règlement est prise en compte pour le calcul classique de redistribution des réactions hyperstatiques grâce à la simplicité de la forme pour la transformation de Laplace. Toutefois, M. Fauchart propose une autre formule qui approche de la courbe représentée dans

la courbe représentée dans les recommandations FIP-CEB soit :

$$K_2 (t-t_o) = \frac{-207644000 (t-t_o) + 64057900 (t-t_o)^2}{-10079300000 + 2769250000 (t-t_o) + 137335000 (t-t_o)^2} + \frac{132563 (t-t_o)^3 + 303,6 (t-t_o)^4 + (t-t_o)^5}{20992 (t-t_o)^3 + 645 (t-t_o)^4 + (t-t_o)^5}$$

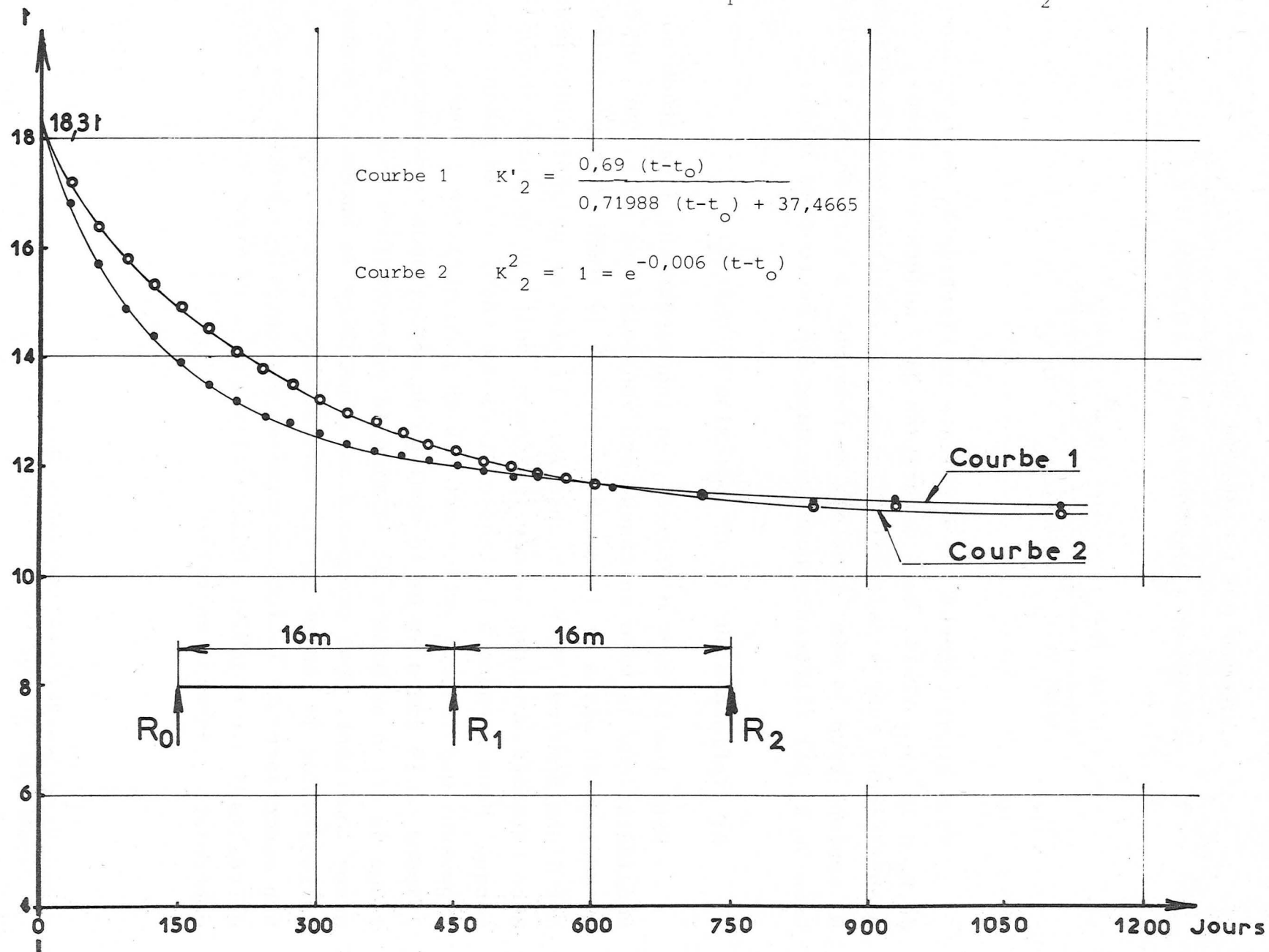
Nous avons reporté les résultats de réaction R_1 en fonction de K_2 à la fig. VI-14. Nous constatons que, malgré les formes mathématiques tout à fait différentes, les réactions hyperstatiques R_1 tendent vers la même limite*. En revanche la vitesse de l'évolution de R_1 est différente pour les deux cas surtout au début.

d) Influence sur la date de mise en charge.

Dans les bureaux d'études, les ingénieurs ont l'habitude de considérer que la mise en charge des voussoirs est de 3 jours après le coulage du béton et le cycle de coulage (y compris la précontrainte) est d'une semaine. Mais sur chantier, la mise en précontrainte peut être retardée soit par le mauvais temps, soit par un incident quelconque. Nous donnons à la figure VI-15 des résultats de calcul en supposant que le pont entier est mis en précontrainte 3 jours, 5 jours, 7 jours ou 10 jours après le coulage du béton. Nous constatons que l'âge du béton au moment de la mise en précontrainte joue un rôle assez important. Nous proposons aux ingénieurs de bureaux d'études de recalculer la redistribution des efforts hyperstatiques en cas de non concordance de la date de mise en précontrainte prévue aux projets et réalisée sur chantier, puisqu'il y a 20 % d'erreur si l'on précontraint 1 semaine en retard.

* de même que les deux lois testées.

FIG. VI-14 EVOLUTION DE REACTION D'APPUI R_1 EN FONCTION DU TEMPS ET K_2



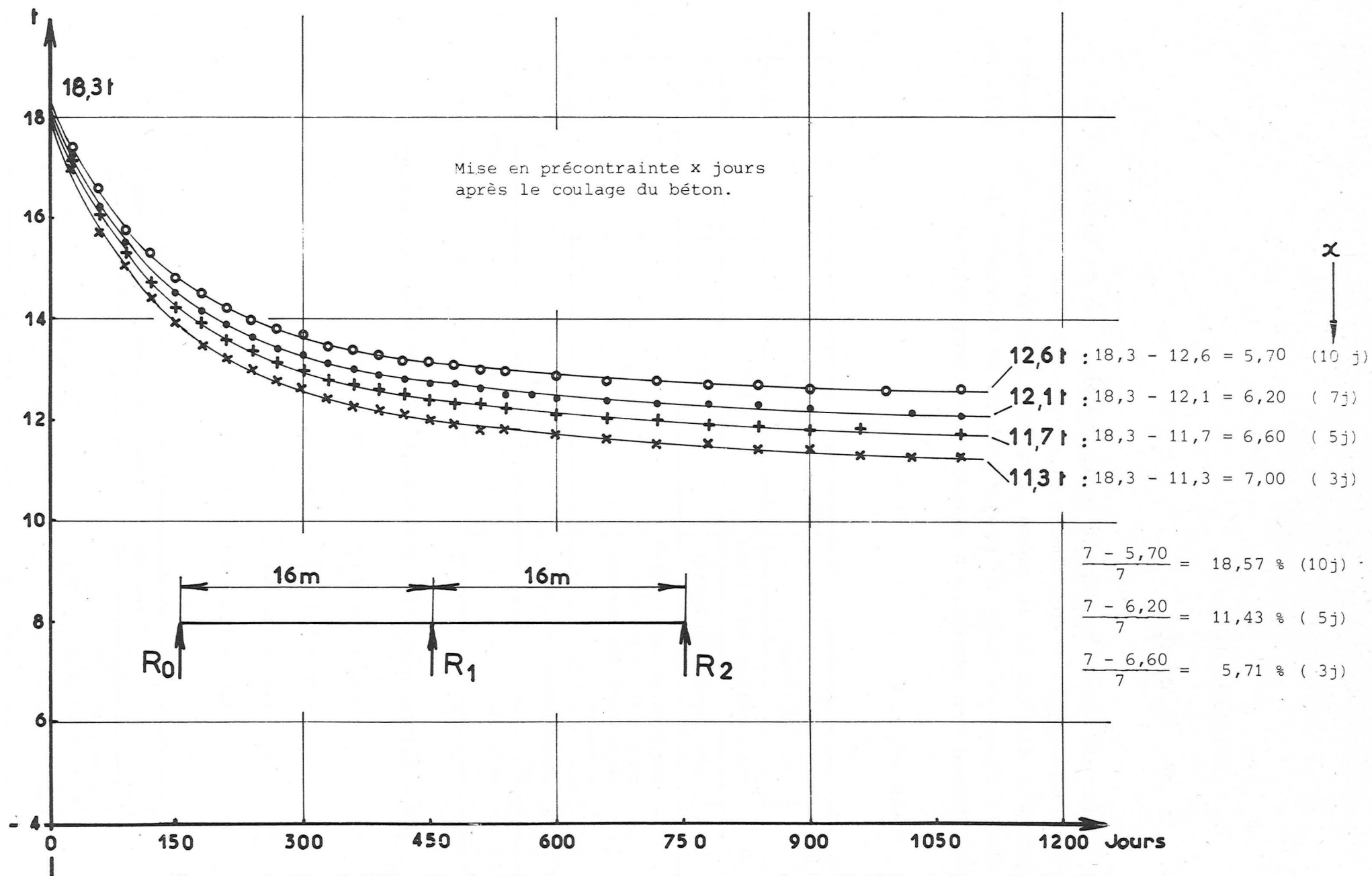


FIG. VI-15 - EVOLUTION DE REACTION D'APPUI R₁ EN FONCTION DU TEMPS ET DU JOUR DE MISE EN PRECONTRAINT

e) Influence de α

$$\alpha = \phi_c \alpha_f \beta_f$$

Le coefficient β_f dépend de la composition du béton, il est fonction du rapport : eau/ciment et le coefficient α_f dépend de l'épaisseur fictive de la pièce. Ces deux coefficients sont souvent faciles à fixer au stade du projet. Il en va autrement du coefficient ϕ_c qui dépend des conditions climatiques (hygrométrie).

Nous avons :

Cas	Conditions de conservation du béton.	Humidité relative de l'air en %	ϕ_c
0	Conservation dans l'eau	100	1
1	dans l'air très humide	90	1,5
2	Coefficient habituellement utilisé par des ingénieurs des bureaux d'études	80	2
3	Généralement en plein air	70	2,3
4	Très sec	50	2,85

Nous allons comparer les résultats des 4 cas ci-dessus, d'où

$$\alpha_1 = 0,65 \times 1,1 \times 1,5 = 1,07$$

$$\alpha_2 = 0,65 \times 1,1 \times 2 = 1,43$$

$$\alpha_3 = 0,65 \times 1,1 \times 2,30 = 1,64$$

$$\alpha_4 = 0,65 \times 1,1 \times 2,85 = 2,04$$

	1er cas	2ème cas	3ème cas	4ème cas
La variation de R_1 en t au bout de 1137 jours	5,2	<u>7,0</u>	9,82	11,4

D'après le tableau ci-dessus, nous constatons que l'hygrométrie joue aussi un très grand rôle dans la redistribution des efforts hyperstatiques. Cependant l'hygrométrie varie en fonction du temps et vaut en moyenne 80 % (voir Fig. VI-16). Il s'avère que le coefficient pris habituellement ($\phi_c = 2$) pour les ingénieurs des bureaux d'études est proche de la réalité.

f) Influence de l'excentricité des câbles

Il peut arriver que par suite d'erreurs d'exécution la position réelle des câbles dans un ouvrage en béton précontraint s'écarte sensiblement de la cote prévue dans le projet. Nous examinons dans cette partie l'influence d'une variation d'excentrement d'un câble sur la valeur des réactions d'appui à long terme.

Compte-tenu du fait que ces écarts sont localisés, nous supposons que dans une seule section proche des appuis (là où le moment négatif est maximal) l'excentrement du câble présente un écart de 20 % par rapport à l'excentrement théorique.

Section	excentrement (en m)	excentrement réel (en m)	$K_a \times 10^6$ valeur cor- recte	$K_a \times 10^6$ valeur réelle	réaction correcte R_1 en t	réaction réelle R_1 en t
15	0,217	0,174	159,402176	138,85822	7,04	6,98

D'après le résultat de calcul, nous n'avons pas trouvé de différence de réaction d'appui pour les deux cas précédents

g) Retrait

Nous avons pris deux fonctions différentes suivantes.

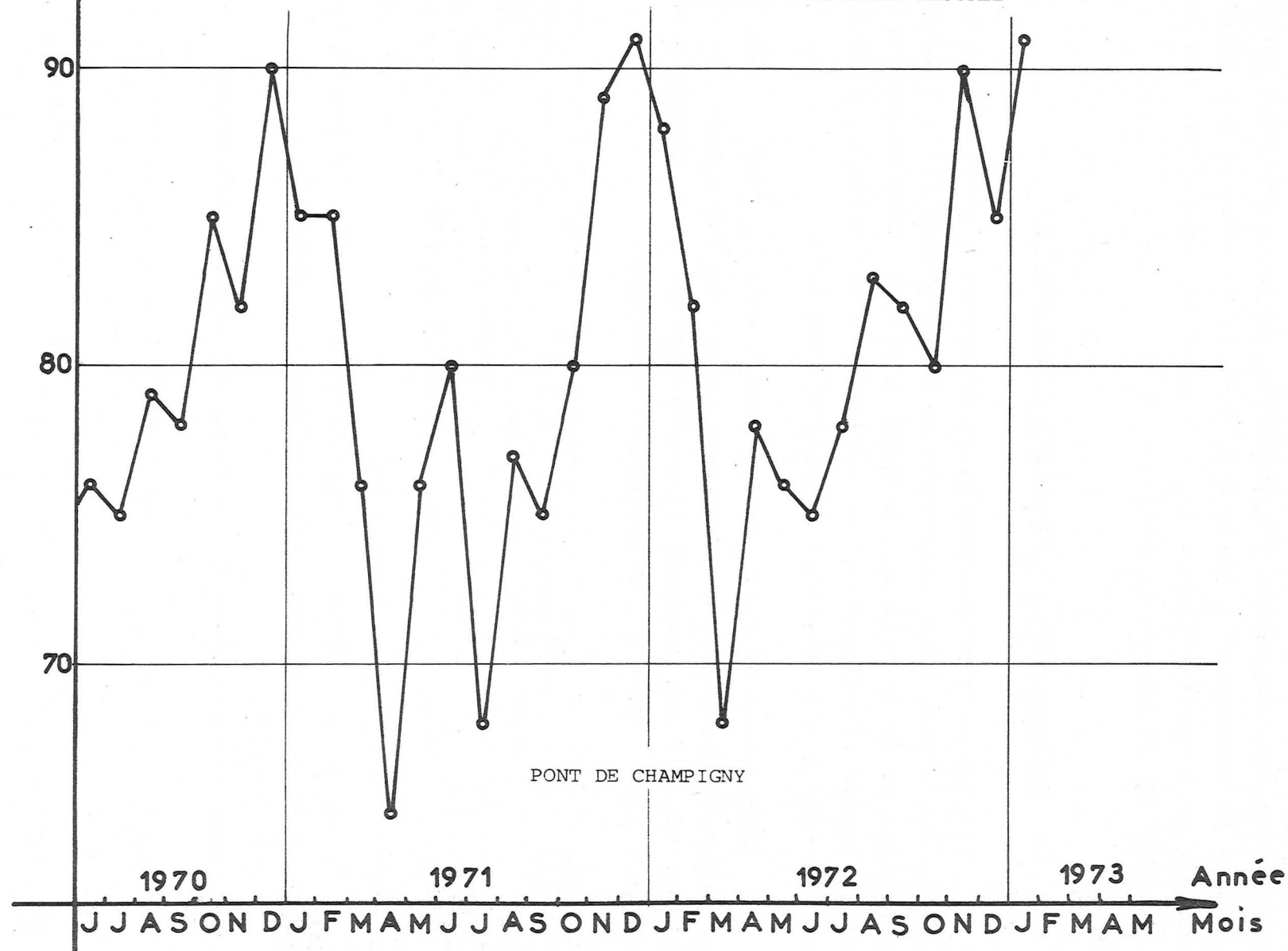
$$1) \varepsilon_r(t, t_0) = \varepsilon_r(t) - \varepsilon_r(t_0) = 0,0001646 \left(\frac{0,69 t}{0,71988t + 37,4665} - \frac{0,69 t_0}{0,71988t_0 + 37,4665} \right)$$

$$2) \varepsilon_r(t, t_0) = \varepsilon_r(t) - \varepsilon_r(t_0) = 0,0001646 (1 - e^{-0,006t}) - (1 - e^{-0,006t_0})$$

Hygrométrie.
%

FIG. VI-16

EVOLUTION D'HYGROMETRIE MOYENNE MENSUELLE MESUREE



Nous avons trouvé, malgré les formes mathématiques différentes, que les deux R_1 , tendent vers la même limite. En revanche la vitesse de l'évolution de R_1 est différente. Ce résultat est analogue à celui obtenu pour la fonction K_2 sachant que $K_2(t, t_0) = K_2(t - t_0)$

VI-2 PONT DE CHAMPIGNY-SUR-YONNE

VI-2.1. Correction de la température

Au bout de quatre ans de mesures, nous avons trouvé que les variations de la température moyenne dans une section du pont de Champigny sont très grandes.

température maximale en ° C		température minimale en ° C	
27.7	9/07/1970	1.5	12/02/1970
27.1	9/07/1971	1.7	12/03/1971
25.7	7/09/1972	1.3	12/01/1973
24.7	7/09/1974		

L'écart maximal de la température moyenne est environ 27° C et le gradient maximal de température (la différence de température entre le hourdis supérieur et le hourdis inférieur) est de 6° C. Nous attirons l'attention sur le fait que les sondes de température ont été placées à l'intérieur du caisson). Par conséquent l'écart maximal de la température et le gradient de température peut être estimé à 40° C et 10° C respectivement. (Les différences de la température entre la surface extérieure et intérieure de la dalle supérieure et inférieure sont de 10° C et 5° C respectivement).

Une méthode de calcul générale des corrections de température a été exposée au chapitre II.

Pour certains ponts de forme simple, ou de moment d'inertie

constant, nous pouvons simplifier la formule II-34 comme suit :

$$\omega = \int_0^{t_i} \left[\frac{z_i}{t_i} \frac{\int_{-y}^{+y} \left\{ \theta(y) - \frac{\int_{-y}^{+y} \theta(y) b(y) dy}{\int_{-y}^{+y} b(y) dy} \right\} b(y) dy}{E I_i} \right] dz_i \quad (A)$$

où les axes x, y et z sont attachés à la section et l'axe du pont respectivement.

La formule précédente repose sur les hypothèses suivantes :

a) Les fibres du tablier situées au même niveau ($y = \text{constante}$) dans une section donnée ($z = \text{constante}$) sont à la même température.

b) Les sections, avant et après la déformation sont restées planes.

Ceci revient à dire que

1) La température fictive est attachée au centre de gravité de la section étudiée. La définition de la température fictive est donnée par la formule suivante.

$$\frac{\int_{-y}^{+y} \theta(y) b(y) dy}{\int_{-y}^{+y} b(y) dy}$$

2) La rotation fictive est égale à la rotation réelle. La rotation fictive est définie par la formule suivante.

$$\frac{\alpha}{I} \int_0^y \theta(y) (y - y') b(y) dy$$

où y' est la distance entre la fibre inférieure de la section et le centre de gravité.

c) Les efforts normaux induits par les appareils d'appuis sont négligeables.

D'après ces formules (la formule II-34 et la formule A), nous pouvons faire la correction des réactions hyperstatiques dues à

la température assez bien à la condition que la variation de la température extérieure soit assez lente. En effet, nous avons mis toutes les sondes de température à l'intérieur de la section, or la variation de la température est assez grande entre les faces extérieures et intérieures de la dalle supérieure du caisson. (environ 10° C pour le pont de Champigny).

Cela revient à dire que les températures mesurées donnent une idée incomplète de la distribution réelle des températures dans le pont, et il est clair que la connaissance approfondie du champ de température exige un appareillage très lourd.

En revanche pour atteindre le but limité que nous nous sommes fixés, qui consiste à corriger les effets de la température sur les réactions d'appui, il suffit d'effectuer les mesures lorsque les variations de température ne sont pas trop rapides, c'est-à-dire très tôt le matin.

Les valeurs de réaction d'appui brutes et après correction des effets thermiques sont données au paragraphe VI-2.4.

VI.2.2. Calcul de la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la théorie du fluage linéaire du béton.

La théorie du fluage linéaire du béton est développée au chapitre III. Etant donné que la méthode de calcul est tout à fait différente de celle d'un pont classique nous donnons ci-dessous les différentes étapes du calcul.

- A - Imaginons le pont entièrement construit.
B - Calculons les rotations des poutres rendues isostatiques soumises aux actions exercées pendant la construction (poids propre des voussoirs et effet des câbles)

Notons que : 1 - Le diagramme du moment dû aux câbles est rectangulaire,

- 2 - Les dates de mise en contrainte de chaque voussoir sont différentes, par conséquent les rotations doivent être séparément calculées pour chaque voussoir.

C - Calculons les moments hyperstatiques.

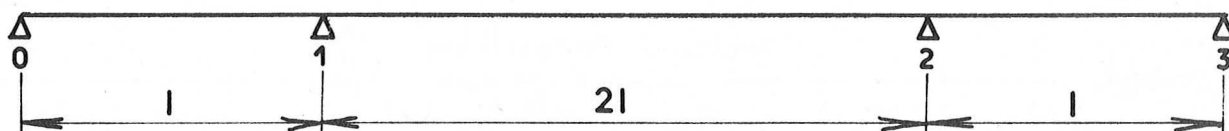
D - Choisissons la loi de fluage. Il s'avère qu'il est impossible de calculer à la main la redistribution des réactions hyperstatiques, si la loi n'est pas choisie de la forme $1 - e^{-\beta(t-t_0)}$ où β varie, d'après les règlements français, comme suit :

Jours	β
1	0,100
3	0,050
7	0,033
14	0,026
90	0,010
365	0,003

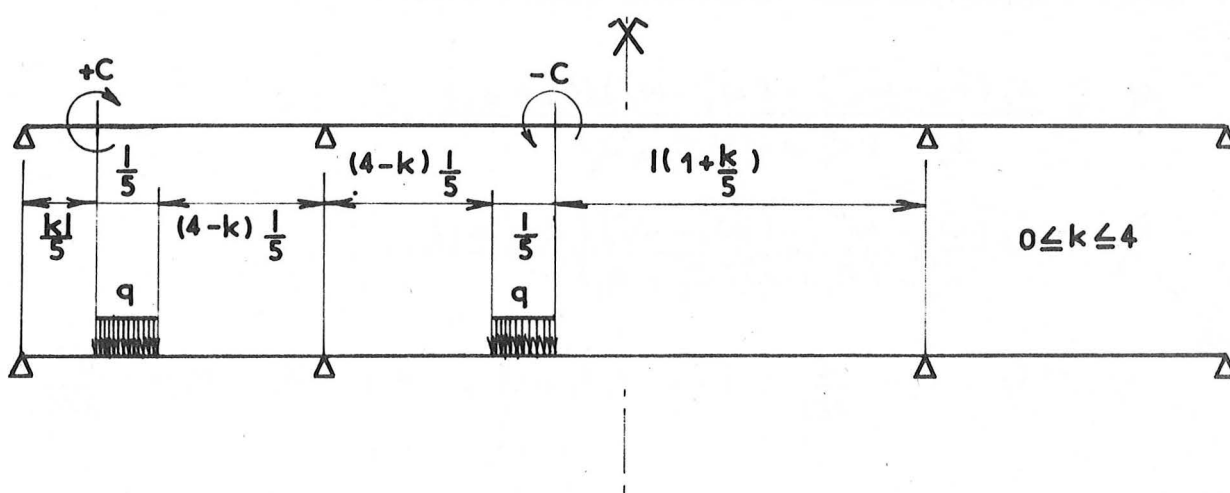
E - Calculons les moments hyperstatiques en fonction du temps, en utilisant la formule III-67. Si l'on désire connaître la limite des variations hyperstatiques, il suffira de faire tendre vers l'infini le temps dans la première partie de la formule.

Calcul des rotations

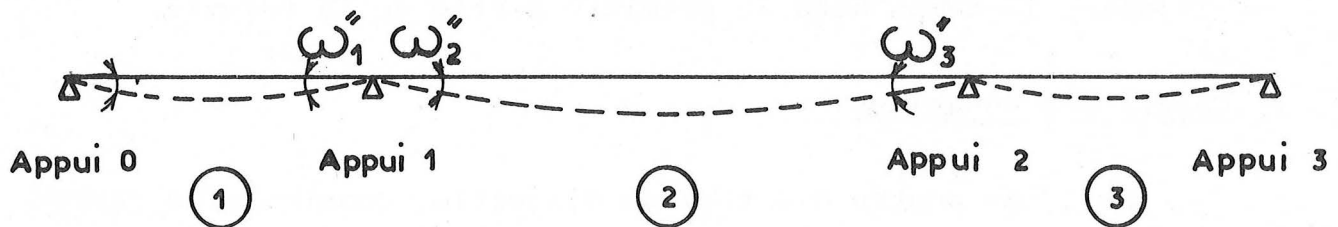
Soit une poutre à 3 travées d'inertie, constante de portée $l, 2l, l$.



Nous simplifions l'effet de la précontrainte en la supposant exercée par des câbles horizontaux dont l'excentricité est de e . L'action d'un câble équivaut donc à celle d'un effort normal F et à celle de 2 couples $\pm C = F \cdot e$ appliqués au droit des ancrages. Le poids propre d'un voussoir est de q (kg/m.). Nous avons 5 voussoirs pour la travée gauche et la travée droite.



Les rotations d'une poutre isostatique sous ces charges extérieures sont les suivantes :



Charges	Rotations isostatiques		
	$EI \omega''_1$	$EI \omega'_2$	$EI \omega''_2$
effet d'un voussoir (q)	$\frac{ql^3}{15000} (49+96K-6K^2-4K^3)$	$-\frac{ql^3}{30000} (1529+36K-66K^2-4K^3)$	$\frac{ql^3}{30000} (1431-156K-54K^2+4K^3)$
effet d'un câble (+ C)	$\frac{c \cdot l}{100} (50-20K+2K^2)$	$-\frac{c}{100} (+ 25-10K+K^2)$	$+\frac{c}{100} (75-10K-K^2)$

Calcul des moments hyperstatiques

d'après l'équation des 3 moments nous avons :

$$M_1 = \frac{b_2(\omega'_3 - \omega''_2) - (\omega'_2 - \omega''_1)(c_2 + a_3)}{b_2^2 - (c_1 + a_2)(c_2 + a_3)}$$

$$M_2 = \frac{b_2(\omega'_2 - \omega''_1) - (\omega'_3 - \omega''_2)(c_1 + a_2)}{b_2^2 - (c_1 + a_2)(c_2 + a_3)}$$

où

$$a_i = 2b_i = c_i = \frac{l}{3EI}, \quad (i = 1, 3, \dots); \quad a_2 = 2b_2 = c_2 = \frac{2l}{3EI}$$

d'où

$$M_1 = \frac{3}{8l} (-3\omega''_1 + 3\omega'_2 + \omega''_2)$$

$$M_2 = \frac{3}{8l} (\omega''_1 - \omega'_2 - 3\omega''_2)$$

La réaction isostatique de la travée 2 due au poids propre est de :

$$R = \frac{q\ell}{100} (11 + 2 K)$$

et le moment isostatique à la clé de la même travée est de :

$$\mu = \frac{q\ell^2}{100} (9 - 2 K)$$

Le moment isostatique dû au couple c à la clé de la travée 2 est nul. Le moment total à la clé est de :

$$M_c^* = \mu + \frac{M_1 + M_2}{2}$$

$$M_c^* = \mu + \frac{3}{8\ell} (-\omega''_1 + \omega'_2 - \omega''_2)$$

$$\text{d'où } M_c^* (\text{voussoirs}) = \frac{+ q\ell^2}{40000} (2071 - 863 K + 66 K^2 + 4 K^3)$$

$$M_c^* (\text{câbles}) = - \frac{3 C}{400} (+ 75 - 20 K + K^2)$$

Loi du fluage du béton

Si l'on utilise la loi (voir Chapitre III) simple de fluage suivante

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right) [1 - e^{-\beta(t-t_0)}]$$

nous aurons le moment comme suit (formule III-67)

$$M(t) = \left(1 - \frac{K}{E}\right) [1 - e^{-\beta(t-t_0)}] \sum_i M^{i*} e^{-\beta(t_0-t_i)}$$

$$\text{avec } \frac{K}{E} = \frac{1}{3} \quad \text{et } t_i < t_0 < t$$

M^{i*} : moment à la clé produite dans le système hyperstatique sous l'action extérieure, t_0 : date de clavage ; t_i :

date de mise en contrainte.

quand $t \rightarrow \infty$, nous avons

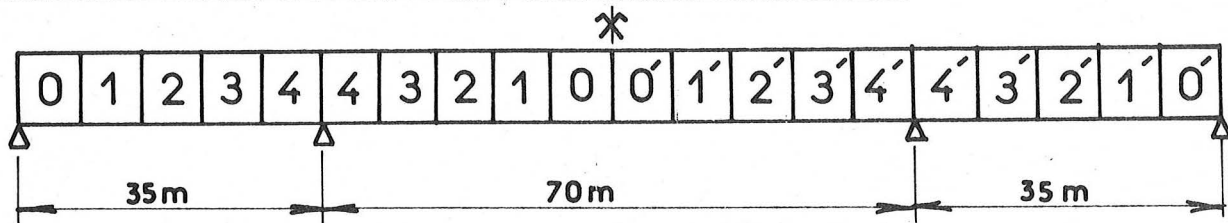
$$M(\infty) = \frac{2}{3} \sum_i M^{i*} e^{-\beta(t_0 - t_i)}$$

β : coefficient caractéristique de la vitesse de fluage .

Nous prenons la valeur

$$\beta = 0,006 \text{ (le temps est en jours).}$$

Les caractéristiques du pont de Champigny s/Yonne



$$q = 16,9 \frac{t}{m.}$$

$$q l^2 = 20702,5 \text{ t.m}$$

pour les voussoirs 4, 4', 3 et 3'

$$q = 14,4 \frac{t}{m.}$$

$$q l^2 = 17640 \text{ t.m}$$

pour les autres voussoirs

Nous partageons M^{i*} en deux parties dues aux câbles et au poids propre.

$$M^{i*} = M^C (\text{câbles}) + M^C (\text{voussoir})$$

Nous calculons M^{i*} sous la forme du tableau suivant :

1ère étape : Calcul de l'intervalle de temps séparant la mise en précontrainte de chaque voussoir et la date de clavage.

2ème étape : Calcul des coefficients de la loi exponentielle.

Calcul de l'âge de chaque voussoir jusqu'au moment du clavage	Voussoirs	4	3	2	1	0
		4'	3'	2'	1'	0'
$t_o - t_i$ en jours		230	190	170	160	150
		130	110	100	70	50
$e^{-\beta(t_o - t_i)}$		0,2516	0,3198	0,3606	0,3829	0,4066
		0,4584	0,5169	0,5488	0,6571	0,7408
SOMME		0,7100	0,8367	0,9094	1,0400	1,1474
Calcul des moments (voussoirs)	M_C^* (voussoirs)	9,75	66,25	173,75	326,25	517,75
	$\frac{10^{-4} \times q l^2}{}$					
	$q l^2$ en t - m	20702,5	20702,5	17640,00	17640,00	17640,00
Calcul des moments (câbles)	M_C^* (voussoirs) en t - m	20,18	137,15	306,50	575,51	913,11
	$\frac{M_C^*}{(Fe)_1}$ (câbles)	- 0,0825	- 0,1800	- 0,2925	- 0,3825	- 0,5625
	$(Fe)_1$	1518,7	1008,0	1048,3	719,0	179,8
effet des voussoirs	M_C^* (câbles) en t - m	- 125,29	- 181,44	- 306,63	- 275,02	- 101,14
	M_C^* (vous.) $e^{-\beta(t_o - t_i)}$ en t - m	14,33	114,75	278,73	598,53	1047,70
effet des câbles	M_C^* (cab.) $e^{-\beta(t_o - t_i)}$ en t - m	88,96	- 151,81	- 278,85	- 286,02	- 116,05
						- 921,69

3^e et 4^e étape : calcul des moments M_i^*

donc $M_c^* = 2054,04 - 921,69 = 1132,35 \text{ t-m}$.

$$(M_c^* = \sum_i M_i^* e^{-\beta(t_0-t_i)})$$

d'où

$$M(\infty) = \frac{2}{3} M_c^* = 754,90 \text{ t-m}$$

$$R(\infty) = \frac{M(\infty)}{35} = 21,56 \text{ t}$$

Soit une augmentation de réaction sur chaque culée de 21,56 t et une diminution de 21,56 t sur pile.

Il est intéressant de savoir que la conséquence de l'imprécision sur le coefficient β n'est pas tellement grave pour la redistribution à cause de l'antagonisme des moments créés par des câbles et par le poids propre.

Juste après le clavage, on dénivelle simultanément les deux appuis sur culées en exerçant une réaction valant au temps t_0 : $R(t_0)$ de façon que la sollicitation soit la même aux temps t_0 et au temps final t_∞ .

Temps	t_0 (clavage)	t (quelconque)	t_∞
Valeur de la réaction de réglage $R^d(t)$	$R^d(t_0)$ inconnue	$\frac{1}{3} R^d(t_0) \left[1 + 2 e^{-3\beta(t-t_0)} \right]$ voir formule III-61	$\frac{1}{3} R^d(t_0)$
Valeur de la réaction d'adaptation par fluage $R^f(t)$	0	$\frac{2Mc^*}{3l} \left[1 - e^{-3\beta(t-t_0)} \right]$ voir formule III-67	$\frac{M(\infty)}{l}$

D'après l'hypothèse, la somme de la réaction de réglage et de la réaction d'adaptation par fluage doivent être égales au temps t_0 et au temps final t_∞ , ce qui s'écrit :

$$R^d(t_0) = \frac{1}{3} R^d(t_0) + \frac{M(\infty)}{l}$$

$$\text{d'où} \quad \frac{2 R^d(t_o)}{3} = + 21,56$$

$$R^d(t_o) = 1,5 \times 21,56 = 32,34 \text{ t}$$

On peut remarquer que cette condition est satisfaite non seulement pour t_o et t_∞ mais pour un temps quelconque.

$$\text{En effet} \quad \frac{1}{3} R^d(t_o) \left[1 + 2 e^{-3\beta(t-t_o)} \right] + \frac{2}{3} \frac{M_c^*}{\ell} \left[1 - e^{-3\beta(t-t_o)} \right] = R^d(t_o)$$

$$\text{si} \quad \frac{2}{3} \frac{M_c^*}{\ell} = \frac{2}{3} R^d(t_o)$$

Effectivement, le pont a été dénivélé après clavage, de telle manière que la variation de réaction hyperstatique soit nulle. Mais après la première année de mesures, une variation de réaction de 8 t a été constatée. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit une nouvelle méthode.

VI.2.3. Calcul de la redistribution des réactions hyperstatiques en utilisant la théorie du fluage linéaire du béton et de la relaxation des aciers combinés.

VI.2.3.1. Données

- 1) $E_a = 21000 \text{ hbars} = 2142000 \text{ kg/cm}^2$
- 2) $E_b = 400 \text{ hbars} = 408000 \text{ kg/cm}^2$
- 3) $\sigma_{ca} = 0,55 R_G = 8635 \text{ kg/cm}^2$
- 4) $R_G = 157 \text{ kg/mm}^2 = (\text{Page 7, Fascicule n° 67-9 bis})$
 $KA 40 \quad S = 155 \text{ mm}^2$
 Effort de rupture 243,66 t
- 5) portées : 35 m - 75 m - 35 m (voir figure V-1)
- 6) Date de construction des éléments du caisson (voir figure V-2)
- 7) Loi rhéologique des câbles (système KA)

$$\Delta\sigma(t) = K \frac{at^n}{1 + at^n} \quad (t \text{ en heures})$$

$$\begin{array}{lcl} \text{ou } K = 25,07 &) & \\ n = 0,382 &) & \text{Coefficients trouvés par} \\ a = e^{k_2} = 0,0206 &) & \text{le laboratoire.} \\ k_2 = -3,88 &) & \end{array}$$

d'où

$$\Delta\sigma(t) = \frac{0,15338327 t^{0,382}}{1 + 0,0061182 t^{0,382}} \quad (t \text{ en jours})$$

en kg/mm^2

8) Coefficient de relaxation des armatures actives (câbles)

$$\psi(t) = \frac{\Delta\sigma(t)}{\sigma_a(o) - \sigma_{ca}}$$

$$\sigma_a(o) = 0,85 R_G$$

d'où

$$\psi(t) = \frac{0,15338327 t^{0,382}}{47,1 + 0,2817 t^{0,382}} \quad (t \text{ en jours})$$

9) Loi rhéologique du béton

$$\varphi(t, t_o) = \alpha k_1(t_o) k_2(t - t_o) \quad (t \text{ en jours})$$

$$\alpha = \varnothing_c \alpha_f \beta_f = 1,43$$

$$\varnothing = 2 \text{ (humidité relative } \sim 80 \%)$$

$$\alpha_f = 0,65 \text{ (rayon moy. } \sim 21 \text{ cm)}$$

$$\beta_f = 1,10 \text{ (E/C = 0,5 } \quad C = 400 \text{ kg/m}^3)$$

La fonction $k_2(t)$ exprimant le développement de la déformation différée en fonction du temps est donné, dans le règlement, par une courbe. Nous proposons de la représenter sous la forme suivante :

$$k_2(t) = \frac{t_f}{at_f + b}$$

$$\frac{t_f}{k_2(t)} = at_f + b$$

L'instruction provisoire "conception et calcul du béton pré-contraint de 1973" indique les valeurs suivantes (page 189) :

$$t_f = 28 \text{ jours} \quad k_2 = 0,42$$

$$t_f = 5 \text{ ans} = 1825 \text{ jours} \quad k_2 = 0,94$$

$$\text{d'où} \quad a = 1,0433$$

$$b = 37,4665$$

Vérification

Jours	:	k_2 calculés	:	k_2 réels	:	erreurs en %	:
28 ~ 1 mois	:	0,42	:	0,42	:	0	:
90 = 3 mois	:	0,685	:	0,62	:	3,7	!!
730 = 2 ans	:	0,914	:	0,89	:	2,7	!
1460 = 4 ans	:	0,935	:	0,92	:	1,6	!
1825 = 5 ans	:	0,94	:	0,94	:	0	!!

par conséquent nous pensons que la formule utilisée est assez proche de la réalité.

Pour tenir compte de la dimension de la pièce, on introduit dans le diagramme des règlements français, au lieu du temps réel t , le "temps fictif" donné par l'expression

$$t_f = t \sqrt{\frac{10}{c_f}}$$

$$\text{d'où } t_f = t \sqrt{\frac{10}{21}} = 0,69 t$$

on a donc :

$$k_2(t) = \frac{0,69 t}{0,71988 t + 37,4665} \quad (t \text{ en jours})$$

Fonction $k_1(t_0)$

La formule $k_1(t_0)$ dépend du durcissement du béton à l'âge de la mise en charge. Il est défini par le diagramme de la page 191 de l'instruction provisoire de 1973 "conception et calcul du béton précontraint" en fonction de l'âge t du béton à la mise en charge.

Nous admettons, à titre d'approximation, que le diagramme donnant $K_1(t_0)$ en fonction du logarithme du temps est linéaire entre les abscisses correspondant à 7 jours et 365 jours, soit 1 semaine et 52 semaines environ, d'où la formule :

$$k_1(t_0) = a \log t_0 + b \quad (t_0 \text{ en semaines})$$

$$t_0 = 1 \text{ semaine} \quad k_1 = 1,4$$

$$t_0 = 52 \text{ semaines} \quad k_1 = 0,50$$

$$\text{donc } b = 1,4$$

$$a = -0,52448$$

$$\text{d'où } k_1(t_0) = -0,52448 \log \frac{t_0}{7} + 1,4 \quad (t_0 \text{ en jours})$$

Vérification

Jours	K_1 calculés	K_1 réels	erreurs en %
7	1,40	1,4	0
14	1,24	1,2	3,3
28	1,08	1,0	8,0
90	0,75	0,75	9,3
180	0,60	0,6	10,0
360	0,50	0,5	0

Discussion :

Bien que l'erreur soit assez grande pour certaines périodes, nous retiendrons cette formule. Bien entendu nous pouvons aussi considérer le diagramme comme étant une droite entre 1 semaine et 26 semaines. Celle-ci nous conduit à une erreur trop grande pour une période inférieure à 26 semaines. Une autre méthode permettant de diminuer les erreurs est de séparer le diagramme en plusieurs tronçons. Nous ne l'avons pas fait par souci de simplification.

d'où

$$\varphi(t_1, t_0) = 1,43 \left(-0,52448 \log(0,14286 t_0) \right) + 1,4 \times \frac{0,69 (t - t_0)}{0,71988 (t - t_0) + 37,4665}$$

$$10) \quad \beta = \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_a(o)} = \frac{\sigma_{ca}}{0,85 R_G}$$

$$\text{d'où} \quad \beta = \frac{86,35}{0,85 \times 157} = 0,647 \quad \text{Sans unité}$$

11) Loi du retrait du béton

$$\epsilon_r(t, t_0) = \epsilon_r \cdot r(t) - r(t_0)$$

$$\text{où} \quad \epsilon_r = k_b \cdot \epsilon_c \cdot K_{ei} \cdot K_p$$

$$K_b = 1,24 \quad (\text{pour } E/c = 0,5, \quad c = 400)$$

$$\epsilon_c = 21 \times 10^{-5} \quad (80 \% \text{ humidité relative de l'air})$$

$$K_{ei} = 0,78 \quad (\text{épaisseur fictive 21 cm})$$

$$K_p = \frac{1}{1 + n\omega}$$

$n = 20$: eu égard à l'influence du fluage

$\omega = \frac{A}{B}$: le coefficient K_p dépend du pourcentage des armatures $\omega = \frac{A}{B}$, rapport de la section des armatures longitudinales de toute nature (à condition qu'elles soient adhérentes) à la

section transversale de la pièce.

Dans le cas du pont de Champigny s/Yonne :

$$\text{section moy. : } B = \frac{3,05 + 3,45}{2} = 3,25 \text{ m}^2$$

section des câbles sur appuis :

$$\begin{aligned} 2KA \ 20 &= 2 \times 776 = 1152 \text{ mm}^2 \\ 24KA \ 40 &= 24 \times 1552 = 37248 \text{ mm}^2 \\ &38800 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \omega = \frac{38800}{3,25 \times 10^6} = 1,169 \times 10^{-2}$$

(ici on néglige les armatures passives)

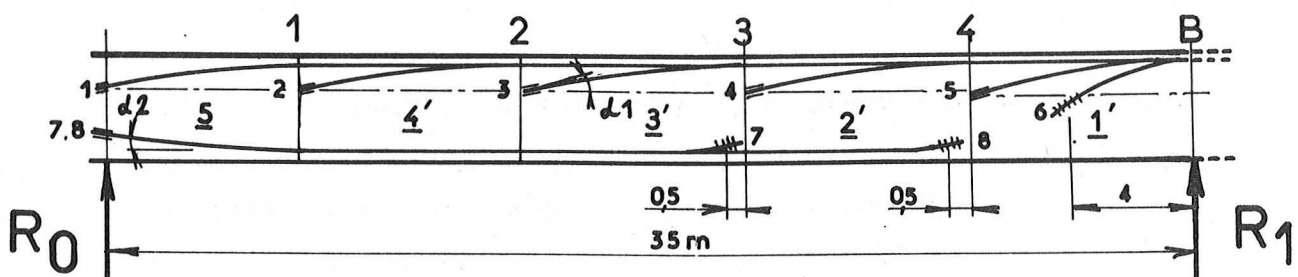
$$\text{d'où } K_p = \frac{1}{1 + 20 \times 1,169 \times 10^{-2}} = 0,8105$$

$$\text{et } \epsilon_r = 1,24 \times 21 \times 10^{-5} \times 0,78 \times 0,8105 = 0,0001646$$

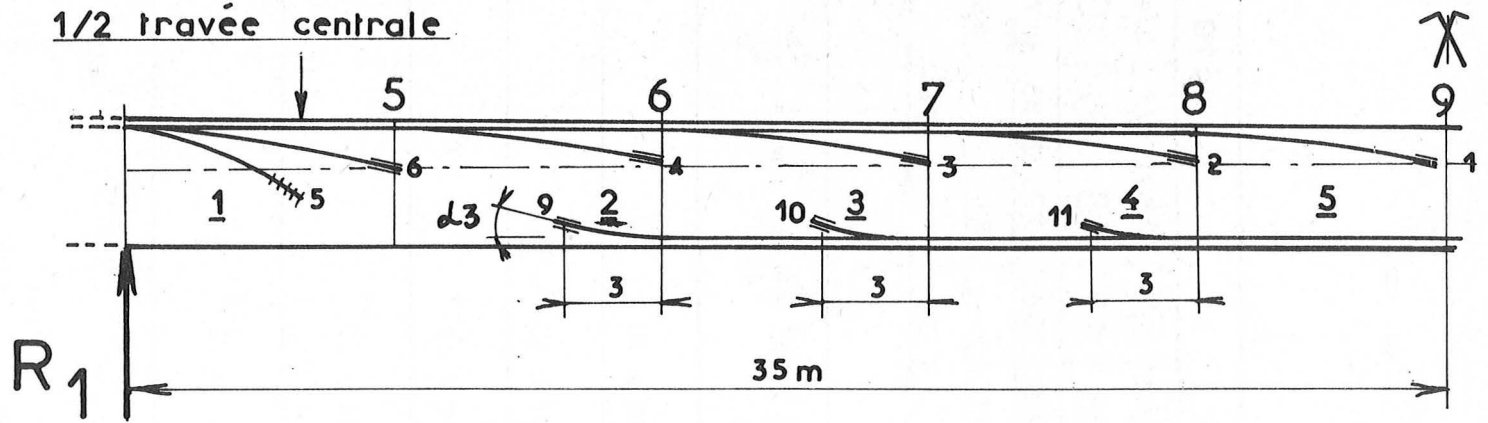
$$\text{d'où } \epsilon_r (t_1 \ t_0) = 0,0001646 \frac{0,69 \ t}{0,71988 \ t + 37,4665} - \frac{0,69 \ t_0}{0,71988 \ t_0 + 37,4665}$$

t en jours

12) Schéma de cablage.



1/2 travée centrale



1 2 KA 20
2 4 KA 40
3 6 KA 40
4 6 KA 40
5 4 KA 40
6 4 KA 40

7 2 KA 40
8 2 KA 40
9 4 KA 40
10 4 KA 40
11 4 KA 40

$\alpha 1$ 20°
 $\alpha 1$ 12° (moy.)
 $\alpha 3$ 9°

13) Coefficients de souplesse du pont :

Pour éviter la complexité du programme principal de calcul de "fluage - relaxation combinés", nous avons pré-établi un programme qui calcule les coefficients de souplesse des ponts. Pour le pont de Champigny, nous avons trouvé :

$$A_2 = 2,6912 \text{ m}^{-3}$$

$$B_2 = 1,4539 \text{ m}^{-3}$$

$$C_1 = 1,3027 \text{ m}^{-3}$$

d'ou les coefficients de souplesse

$$a_2 = \frac{A_2}{E} = 6,59755 \times 10^{-12} \text{ (kg. cm)}^{-1}$$

$$b_2 = \frac{B_2}{E} = 3,56348 \times 10^{-12} \text{ (kg. cm)}^{-1}$$

$$c_1 = \frac{C_1}{E} = 3,19289 \times 10^{-12} \text{ (kg. cm)}^{-1}$$

Etant donné que le pont est symétrique, nous avons : $C_1 = a_3$ $a_2 = C_2$

d'où $b_2^2 - (C_1 + a_2)^2 = -83,15433 \times 10^{-24} \text{ (kg. cm)}^{-1}$ $(C_1 + a_2) = 9,79044 \times 10^{-12} \text{ (kg. cm)}^{-1}$

14) Calcul des coefficients K_a

1969										1970		1969						1970	
10/26	10/12	9/30	9/13	7/30	7/30	9/13	9/30	10/12	10/26	2/1	1/7	12/14	12/1	11/12	11/12	12/1	12/14	1/7	2/1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
33	1015	1725	2435	3145	355	1065	1775	2485	3170	3830	4515	5225	5935	6645	355	1065	1775	2485	3170
05	71	71	71	71	71	71	71	61	05	05	71	71	71	71	71	71	71	71	06
66	71	71	71	71	71	71	71	71	05	61	71	71	71	71	71	71	71	71	05

Sections :	S_a en m^2	S_b brut en m^2	e en m	e^2 en m^2	I_b brut en m^4	$e^2 \frac{S_b}{I_b}$	$\frac{S_a}{S_b} \times 10^6$	$k_a = \frac{S_a}{S_b} (1 + e^2 \frac{S_b}{I_b})$	$m_a, m_a = \frac{E_a}{E_b}$
1	2K A20 $2 \times 776 = 1552 \times 10^{-6}$	5,74	1,07	1,1449	7,46	0,88093	508,572	$26,700 \times 10^{-6}$	
2	4K A40 $4 \times 1552 = 6208 \times 10^{-6}$	5,74	1,07	1,1449	7,46	0,88093	$\frac{1081,533}{1351,916}$	$133,500 \times 10^{-6}$	
3	6K A40 $6 \times 1552 = 9312 \times 10^{-6}$	5,74	1,04	1,0816	7,46	0,83222	$\frac{1622,300}{2974,216}$	$286,095 \times 10^{-6}$	
4	6K A40 $6 \times 1552 = 9312 \times 10^{-6}$	5,74	1,00	1,0000	7,46	0,76944	$\frac{1622,300}{4596,516}$	$426,996 \times 10^{-6}$	
5	8K A40 $8 \times 1552 = 12416 \times 10^{-6}$	6,74	1,13	1,2769	9,72	0,88542	$\frac{1842,137}{6438,653}$	$637,327 \times 10^{-6}$	

1) Les voussoirs 1, 2, 3, 4, 5 et 10, 9, 8, 7, 6 respectivement sont symétriques par rapport à la pile gauche.

2) Le pont est symétrique par rapport au milieu de la travée centrale.

NOTA

Sections :	S_a en m^2	S_b brut en m^2	e en m	e^2 en m^4	I_b brut en m^4	$e^2 \frac{S_b}{I_b}$	$\frac{S_a}{S_b} \times 10^{-6}$	$K_a = \frac{S_a}{S_b} (1 + e^2 \frac{S_b}{I_b}) m_a m_a = \frac{E_a}{E_b}$
1	4 KA 40 $4 \times 1552 = 6208 \times 10^{-6}$	5,74	- 1,4	1,96	7,46	1,5081	1081,533	$142,4111 \times 10^{-6}$
2	4 KA 40 $4 \times 1552 = 6208 \times 10^{-6}$	5,74	- 1,8	3,24	7,46	2,4930	1081,533	$198,3342 \times 10^{-6}$
3	4 KA 40 $4 \times 1552 = 6208 \times 10^{-6}$	5,74	- 2,07	4,285	7,46	3,2970	1081,533	$243,9858 \times 10^{-6}$
4	2 KA 40 $2 \times 1552 = 3104 \times 10^{-6}$	5,74	- 2,07	4,285	7,46	3,2970	540,766	$121,9929 \times 10^{-6}$
5	0							
6	0							
7	4 KA 40 6208×10^{-6}	6,74	- 2,07	4,285	9,72	2,9712	931,751	$194,2588 \times 10^{-6}$
8	8 KA 40 18624×10^{-6}	5,74	- 2,07	4,285	7,46	3,2970	2163,066	$487,9715 \times 10^{-6}$
9	12 KA 40 18624×10^{-6}	5,74	- 2,07	4,285	7,46	3,2970	3244,599	$731,9573 \times 10^{-6}$
10	12 KA 40 18624×10^{-6}	5,74	- 2,07	4,285	7,46	3,2970	3244,599	$731,9573 \times 10^{-6}$

Nota : Le pont est symétrique par rapport au milieu de la travée centrale.

VI.2.3.2. Moments

Les moments hyperstatiques sont calculés selon l'équation des 3 moments.

$$M_1 = \frac{b_2 (\omega'_3 - \omega''_2) - (\omega'_2 - \omega''_1)(a_2 + c_1)}{b_2^2 - (c_1 + a_2)^2}$$

$$M_2 = \frac{b_2 (\omega'_2 - \omega''_1) - (\omega'_3 - \omega''_2)(a_2 + c_1)}{b_2^2 - (c_1 - a_2)^2}$$

d'où $M_1 = - \frac{3,56348 (\omega'_3 - \omega''_2) - 9,79044 (\omega'_2 - \omega''_1)}{83,15433 \times 10^{-12}}$

$$M_2 = - \frac{3,56348 (\omega'_2 - \omega''_1) - 9,79044 (\omega'_3 - \omega''_2)}{83,15433 \times 10^{-12}}$$

Les moments hyperstatiques dus à la redistribution par fluage sont répartis linéairement entre les appuis. Par conséquent nous avons :

Travée 1	$M_{3,3} = 0,09429 M_1$	:	:	$M_{3,55} = M_1 - \frac{3,55}{70,0} (M_1 - M_2)$	!
	$M_{10,15} = 0,29000 M_1$	:	:	$M_{10,65} = M_1 - \frac{10,65}{70,0} (M_1 - M_2)$	!
	$M_{17,25} = 0,49286 M_1$	:	:	$M_{17,75} = M_1 - \frac{17,75}{70,0} (M_1 - M_2)$	!
	$M_{24,35} = 0,69571 M_1$	:	:	$M_{24,85} = M_1 - \frac{24,85}{70,0} (M_1 - M_2)$	!
	$M_{31,45} = 0,89857 M_1$	:	:	$M_{31,70} = M_1 - \frac{31,70}{70,0} (M_1 - M_2)$	!
Travée 3	Travée 2				!
	$M_{3,55} = 0,89857 M_2$	:	:	$M_{38,30} = M_1 - \frac{38,30}{70,0} (M_1 - M_2)$	!
	$M_{10,65} = 0,69571 M_2$	:	:	$M_{45,15} = M_1 - \frac{45,10}{70,0} (M_1 - M_2)$	!
	$M_{17,75} = 0,49286 M_2$	:	:	$M_{52,25} = M_1 - \frac{52,25}{70,0} (M_1 - M_2)$	!
	$M_{24,85} = 0,29000 M_2$	:	:	$M_{59,35} = M_1 - \frac{59,35}{70,0} (M_1 - M_2)$	!
	$M_{31,75} = 0,09429 M_2$	:	:	$M_{66,45} = M_1 - \frac{66,45}{70,0} (M_1 - M_2)$	!

MOMENTS CALCULES PAR RAPPORT A LA DROITE DES VOUSOIRS EN t - m

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Poids propre		- 365	- 1455	- 3260	- 5810	- 9125	- 5810	- 3260	- 1455	- 365	0
Superstructures		+ 70	+ 14	- 177	- 505	- 969	- 367	+ 101	+ 625	+ 667	+ 686
Σ_1		- 295	- 1441	- 3437	- 6315	-10094	- 6177	- 3159	- 830	+ 302	+ 686
Précontrainte	Précontrainte supérieure isostatique	+ 165	+ 822	+ 1755	+ 2599	+ 4440	+ 2599	+ 1755	+ 822	+ 165	0
	Précontrainte inférieure isostatique	- 880	- 1135	- 653	0	0	0	- 1305	- 2610	- 3910	-3910
	Précontrainte hyperstatique	+ 310	+ 640	+ 975	+ 1305	+ 1640	+ 1640	+ 1640	+ 1640	+ 1640	+1640
Σ_2		- 405	+ 327	+ 2077	+ 3904	+ 6080	+ 4239	+ 2090	- 148	- 2105	-2270
$\Sigma_1 + \Sigma_2$		- 700	- 1114	- 1360	- 2411	- 4014	- 1938	- 1069	- 978	- 1803	-1584
Dénivellation d'appuis		+ 140	+ 280	+ 420	+ 700	+ 700	+ 700	+ 700	+ 700	+ 700	+700
Moment final		- 560	- 834	- 940	- 1711	- 3314	- 1238	- 369	- 178	- 1103	-884

Les moments initiaux avant redistribution sont :

VI. 2.3.3. Histoire de la mise en charge des voussoirs

Pour mieux vibrer le béton, la moitié inférieure du voussoir a d'abord été coulée et pour économiser les coffrages les voussoirs ont été coulés par deux à la fois. La moitié supérieure du voussoir a été normalement coulée quatre jours après le coulage de la première moitié. Nous donnons les dates de mise en précontrainte par rapport au jour du clavage.

N° de voussoirs	Jours
1	148
2	162
3	175
4	193
5	237
6	237
7	191
8	175
9	162
10	168
11	50
12	75
13	99
14	112
15	131
16	131
17	112
18	99
19	75
20	50

VI.2.3.4. Calcul de rotations

Les rotations ont été calculées de la manière ci-après :

• Rotation à gauche : $\int_0^1 \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \frac{\varepsilon(x)}{e} dx$

• Rotation à droite :

$$\int_0^l \frac{x}{l} \frac{\varepsilon(x)}{e} dx$$

où $\varepsilon(x)$ (déformation du niveau du câble moyen) est calculé par la formule IV.40. Pour faciliter la programmation, nous calculons d'abord la déformation déjà effectuée du béton le jour du clavage.

$$\Delta^x \varepsilon(t_c) = \frac{K_a \sigma_a}{E_a} A(t_c, t_0) + \varepsilon_r(t_c, t_0) B(t_c, t_0)$$

où $t_c = 237$ jours ; $t_0 > 237$ jours

à partir de 238 jours (jour de clavage), la redistribution des effets hyperstatiques intervient. Nous utilisons la formule suivante :

$$\begin{aligned} \Delta^x \varepsilon(t_i, t_0) = & \frac{K_a \sigma_a}{E_a} A(t_i, t_0) + \varepsilon_r(t_i, t_0) B(t_i, t_0) + \\ & + \frac{e}{E_b I_b} \cdot M_c(t_i, t_c) \end{aligned}$$

où $t_i = 238$ jours

La variation du moment hyperstatique ΔM_i est calculée à partir des accroissements de déformation définis par :

$$\Delta \Delta^x \varepsilon(t_i, t_0) = \Delta^x \varepsilon(t_i) - \Delta^x \varepsilon(t_c)$$

Pour la boucle suivante :

$$\begin{aligned} \Delta^x \varepsilon(t_{i+1}, t_0) = & \frac{K_a \sigma_a}{E_a} A(t_{i+1}, t_0) + \varepsilon_r(t_{i+1}, t_0) B(t_{i+1}, t_0) + \\ & + \frac{e}{E_b I_b} [M_c(t_{i+1}, t_c) + \Delta M_i c(t_{i+1}, t_i)] \end{aligned}$$

A, B et C (voir IV-40) sont des fonctions connues du temps, résultant de la résolution du système intégral-différentiel traduisant l'interdépendance entre le fluage du béton et la relaxation des aciers. Nous pouvons donc calculer ΔM_{i+1} à partir de la formule

$$\Delta \Delta \epsilon^x(t_{i+1}, t_i) = \Delta \epsilon^x(t_{i+1}) - \Delta \epsilon^x(t_i)$$

La 3ème boucle de calcul est :

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon^x(t_{i+2}, t_0) &= \frac{K_a \sigma_a}{E_a} A(t_{i+2}, t_0) + \epsilon_r(t_{i+2}, t_0) B(t_{i+2}, t_0) + \\ &+ \frac{e}{E_b I_b} [M_c(t_{i+2}, t_c) + \Delta M_i c(t_{i+2}, t_i) + \Delta M_{i+1} c(t_{i+2}, t_{i+1})] \end{aligned}$$

Le calcul est poursuivi de façon analogue pour les itérations suivantes.

Nous constatons que seules les valeurs de A, B et C relatives à une itération sont utilisées dans le calcul et que par conséquent les valeurs calculées par les itérations précédentes peuvent être effacées.

C'est la raison pour laquelle un petit ordinateur* est très bien adapté à ce genre de calcul. En revanche le temps de calcul augmente très vite avec le nombre d'itérations. Nous donnons ci-après un exemple des temps de calcul nécessaires pour le pont de Champigny.

Ordinateur IRIS 80	
Boucles	Temps en minutes
239	15
633	100
903	200

afin de réduire le temps de calcul nous avons fait un programme avec un pas de temps variable, avec les pas suivants :

* IBM 360 par exemple.

Mois	:	pas en jours	:	boucles
1er mois	:	1	:	30
2ème et 3ème mois	:	5	:	12
4ème à 12ème mois	:	10	:	27
13ème à 36ème mois	:	30	:	24
37ème à 120ème mois	:	60	:	42
$\Sigma = 10 \text{ ans}$	:		:	$\Sigma = 135$

avec les pas définis ci-dessus, nous pouvons, à la fois trouver un résultat qui approche la réalité et qui limite le temps de calcul (inférieur à 5 minutes).

VI.2.4. Réactions d'appuis mesurées et comparaison avec les résultats de calcul

Les réactions d'appuis varient au cours de la journée. Ces variations sont dues essentiellement aux phénomènes thermiques. Pour faire la correction, nous avons développé une méthode de calcul au chapitre II. En outre, nous mesurons plusieurs fois les réactions au cours de la journée et nous prenons le minimum comme la réaction du jour considéré. Les résultats de mesures sont donnés dans les tableaux 1, 2, 3 et sous forme de courbes à la figure VI-17.

Nous pouvons trouver un exemple des mesures extensométriques (brutes et après corrections thermiques) sous formes de courbes dans la figure VI-18 et aussi la moyenne des déformations données par 8 extensomètres des sections 1 et 2 du Pont de Champigny-sur-Yonne dans la figure VI-19 (pour mémoire).

Etant donné que l'hygrométrie relative et la température du béton sont des facteurs dont on doit tenir compte dans le calcul, nous donnons l'allure de la température du béton dans un point précis en fonction du temps et l'hygrométrie relative en fonction du temps dans les figures VI-22 et VI-21 respectivement.

Les réactions d'appuis brutes et après la correction thermique du pont de Champigny sont données au tableau 4 et les valeurs théoriques dues à la redistribution sont données au tableau 5. Les courbes de la réaction d'appui brute et après la correction thermique sont données à la figure VI-23, nous pouvons aussi trouver la courbe théorique dans la figure VI-23. Il importe de souligner que le pont est conçu, avec la méthode de calcul classique, de manière que la variation de la réaction soit nulle. Cependant la variation des réactions d'appui mesurées sur culées atteint, pendant quatre ans et demi environ 250 KN. En revanche les résultats du calcul obtenus par la méthode dite "fluage-relaxation combinés" sont très satisfaisants (voir fig. VI-23). Il importe également de souligner que la variation globale des réactions d'appui sur culées atteint, suivant le calcul, des proportions élevées (environ de 50 % de la réaction après clavage) qu'il n'est pas possible de vérifier du fait que les mesures des

réactions d'appui n'ont été commencées que 85 jours après le clavage.

VI.2.5. Flèches et déformations mesurées et comparaison avec les résultats de calcul

La flèche au milieu de la travée centrale est calculée de la manière suivante

$$V_t = V_1(x) + V_2(x)$$

où

$$V_1(x) = \omega_0 (x - x_0) + \int_{x_0}^x \frac{\Delta M (x - \xi)}{EI} d\xi,$$

$$\omega_0 = \int_0^l \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \frac{\Delta M}{EI} dx$$

Etant donné que ΔM est réparti linéairement sur la travée centrale (70 m), nous avons

$$\omega_0 = \frac{1}{6EI} [-14000 M_1 - 7000 M_2]$$

et

$$V_2 = \omega'_0 (x - x_0) + \int_{x_0}^x (x - \xi) \frac{\varepsilon}{e} d\xi$$

$$\omega'_0 = \int_0^l \left(\frac{x}{l} - 1 \right) \frac{\varepsilon}{e} dx$$

Nous donnons les résultats sous la forme du tableau suivant :

(	:	Mesures	:	calculs	)
(	:		:		)
(	:		:		)
(	Flèches	5 mm	:	9 mm	)
(	:		:		)
(	* déformations	12×10^{-5}	:	7×10^{-5}	)
(	:		:		)

* La déformation mesurée est la moyenne de 8 extensomètres répartis dans deux sections (voir VI-19 et VI-20). La déformation calculée est celle du câble fictif de la section correspondante.

PONT DE CHAMPIGNY

MESURES DES RÉACTIONS D'APPUI

Sommes des réactions d'appuis
côté amont + côté aval des rives
droite et gauche

TABLEAU 1

DATE	Amont r.d.	Aval r.d.	RIVE DROITE	Amont r.g.	Aval r.g.	RIVE GAUCHE
16.6.70	560	560	1120	611	499	1110
30.7	563	557	1120	638	477	1115
28.8	557	583	1140	625	494	1119
15.10	534	565	1099	610	472	1082
5.11	533	559	1092	609	462	1071
4.12	551	579	1130	634	475	1109
15.1.71	543	578	1121	630	475	1105
12.2	501	572	1073	580	474	1054
12.3	544	582	1126	625	476	1101
6.5	559	649	1208	661	530	1191
8.6	583	618	1201	667	521	1188
9.7	578	640	1218	644	561	1205
13.8	599	616	1215	677	516	1193
17.9	551	605	1156	640	495	1135
22.9	596	625	1221	683	516	1199
21.10	579	598	1177	652	499	1151
20.11	570	583	1153	644	481	1125

forces exprimées en KN.

PONT DE CHAMPIGNY

MESURES DES RÉACTIONS D'APPUIS

Sommes des réactions d'appuis
côté amont + côté aval des rives
droite et gauche

TABLEAU 2

DATE	Amont r.d.	Aval r.d.	RIVE DROITE	Amont r.g.	Aval r.g.	RIVE GAUCHE
29.12.71	574	598	1172	646	487	1133
9.2.72	586	606	1192	668	494	1162
17.3	578	632	1210	657	530	1187
21.4	604	646	1250	691	526	1217
26.5	619	631	1250	708	542	1250
5.7	603	676	1279	697	573	1270
4.8	619	653	1272	701	536	1237
8.9	591	611	1202	660	524	1184
13.10	591	600	1191	656	505	1161
9.11	643	668	1311	719	548	1267
8.12	579	593	1172	656	482	1138
12.1.73	627	629	1256	705	510	1215
9.2.	618	639	1257	707	523	1230
9.3	612	629	1241	697	513	1210
13.4	597	648	1245	678	534	1212
11.5	593	644	1237	680	518	1198
23.6	649	636	1285	733	547	1280

forces exprimées en KN.

PONT DE CHAMPIGNY

MESURES DES RÉACTIONS D'APPUIS

Sommes des réactions d'appuis
côté amont + côté aval des rives
droite et gauche

TABLEAU 3

DATE	Amont r.d.	Aval r.d.	RIVE DROITE	Amont r.g.	Aval r.g.	RIVE GAUCHE
3.8.73	627	635	1262	736	550	1286
7. 9	643	647	1290	725	562	1287
5. 10	612	690	1302	710	570	1280
9-11	622	684	1306	749	556	1305
7-12	656	663	1319	741	534	1275
11-1-74	633	663	1296	727	533	1260
8-2	619	619	1238	698	502	1200
8-3	642	657	1299	727	529	1256
5-4	612	645	1257	702	537	1239
14-6	660	685	1344	749	573	1322
12-7	657	675	1332	765	574	1339
9-8	649	674	1323	728	559	1287
10-9	649	650	1299	725	532	1257

forces exprimées en KN.

TABLEAU 4

PONT DE CHAMPIGNY

Réactions d'appuis - Valeurs brutes et corrigées

Date	Valeurs brutes (moyenne des 4 pesons) en KN	Corrections thermiques en KN	Valeurs corrigées en KN	Observations
16/06/70	1115			Il n'y a pas de sondes thermiques pour pouvoir faire des corrections.
30/07/70	1117,5			
28/08/70	1129,5			
15/10/70	1090,5	22,56	1113,06	
5/11/70	1081,5	22,56	1104,06	
4/12/70	1119,5	5,88	1125,38	
15/01/71	1113	1,96	1114,96	
12/02/71	1063,5	56,88	1120,38	
12/03/71	1113,5	26,48	1139,98	
6/05/71	1199,5	- 40,21	1159,29	
8/06/71	1194,5	- 34,32	1160,18	
9/07/71	1211,5	- 57,86	1153,64	
13/08/71	1204	- 29,42	1174,58	
17/09/71	1145,5	25,50	1171,00	
22/09/71	1210	- 39,23	1170,77	
21/10/71	1164	33,34	1197,34	
20/11/71	1139	25,50	1164,50	
29/12/71	1152,5	57,86	1210,36	
9/02/72	1177	12,75	1189,75	
17/03/72	1198,5	- 8,51	1189,99	
21/04/72	1233,5	- 7,64	1225,86	
26/05/72	1250	- 44,89	1205,11	
05/07/72	1274,5	- 63,76	1210,74	
04/08/72	1254,5	- 18,65	1235,85	
08/09/72	1193	- 62,01	1130,99	
13/10/72	1176	+ 12,04	1188,04	
09/11/72	1289	- 10,60	1278,40	
08/12/72	1155	+ 41,50	1196,50	
12/01/73	1235,5	+ 30,38	1205,12	
09/02/73	1243,5	+ 15,56	1259,06	
09/03/73	1225,5	+ 22,04	1247,54	
13/04/73	1228,5	+ 41,62	1270,12	
11/05/73	1217,5	+ 46,45	1263,95	
23/06/73	1282,5	- 60,70	1221,80	
03/08/73	1274	- 51,44	1222,56	
07/09/73	1288,5	- 52,45	1236,05	
05/10/73	1291	+ 8,90	1299,90	
09/11/73	1305,5	+ 1,27	1306,77	
07/12/73	1297	+ 7,35	1304,35	

SUITE TABLEAU 4

(	Date	:	Valeurs brutes	:	Corrections	:	Valeurs	:		:
(		:	(moyenne des	:	thermiques	:	corrigées	:	Observations	)
(		:	4 pesons) en	:	en KN	:	en KN	:		)
(		:	KN	:		:		:		)
(		:		:		:		:		)
(	11/01/74	:	1278	:	+ 4,21	:	1282,21	:		)
(	08/02/74	:	1219	:	+ 56,96	:	1275,96	:		)
(	08/03/74	:	1277,5	:	+ 8,55	:	1286,05	:		)
(	05/04/74	:	1248	:	- 2,85	:	1245,15	:		)
(	14/06/74	:	1333	:	- 80,67	:	1252,33	:		)
(	12/07/74	:	1335,5	:	-111,25	:	1224,25	:		)
(	09/08/74	:	1305	:	- 20,34	:	1284,66	:		)
(	10/09/74	:	1278	:	+ 34,68	:	1312,68	:		)
(		:		:		:		:		)

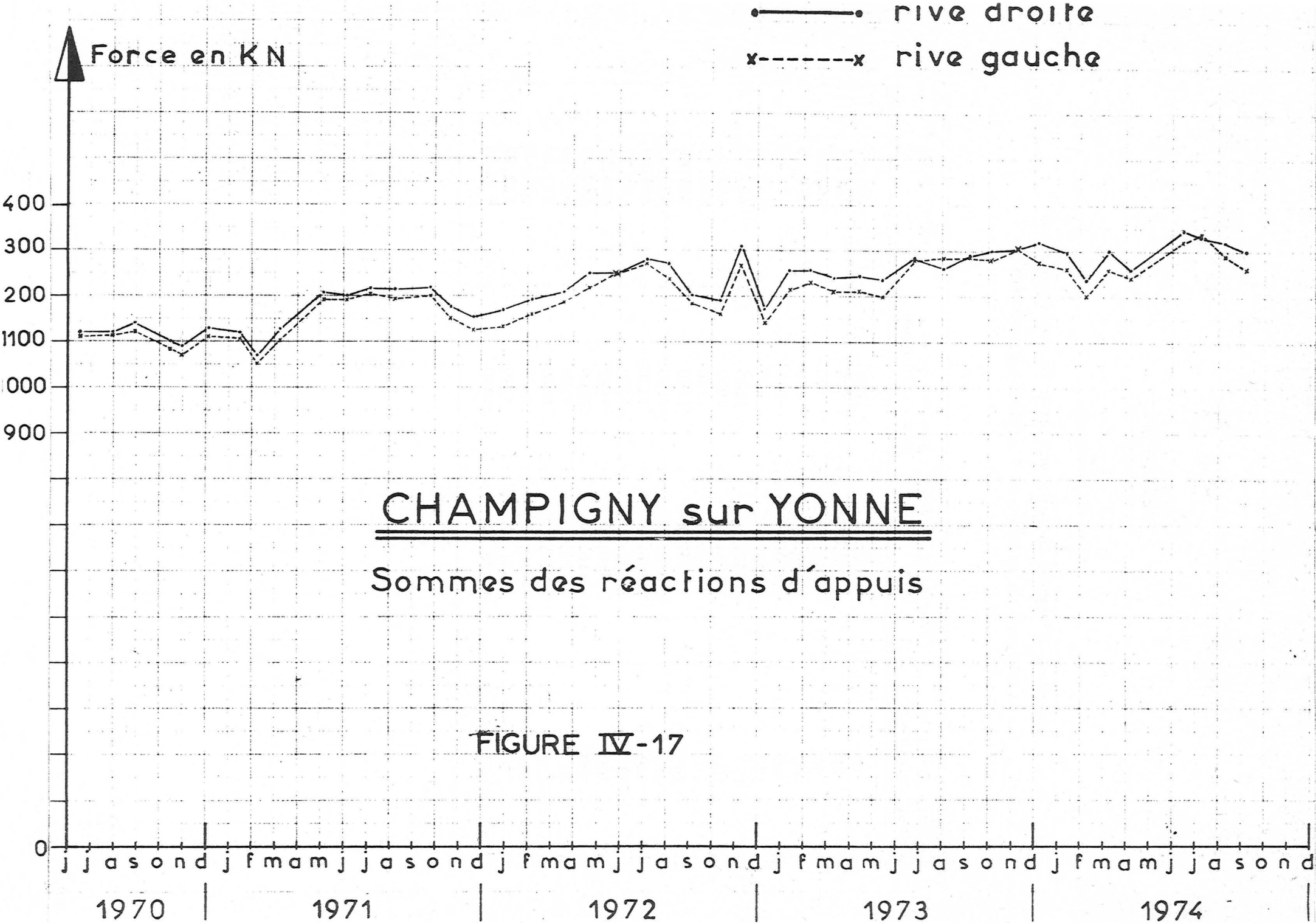
TABLEAU 5

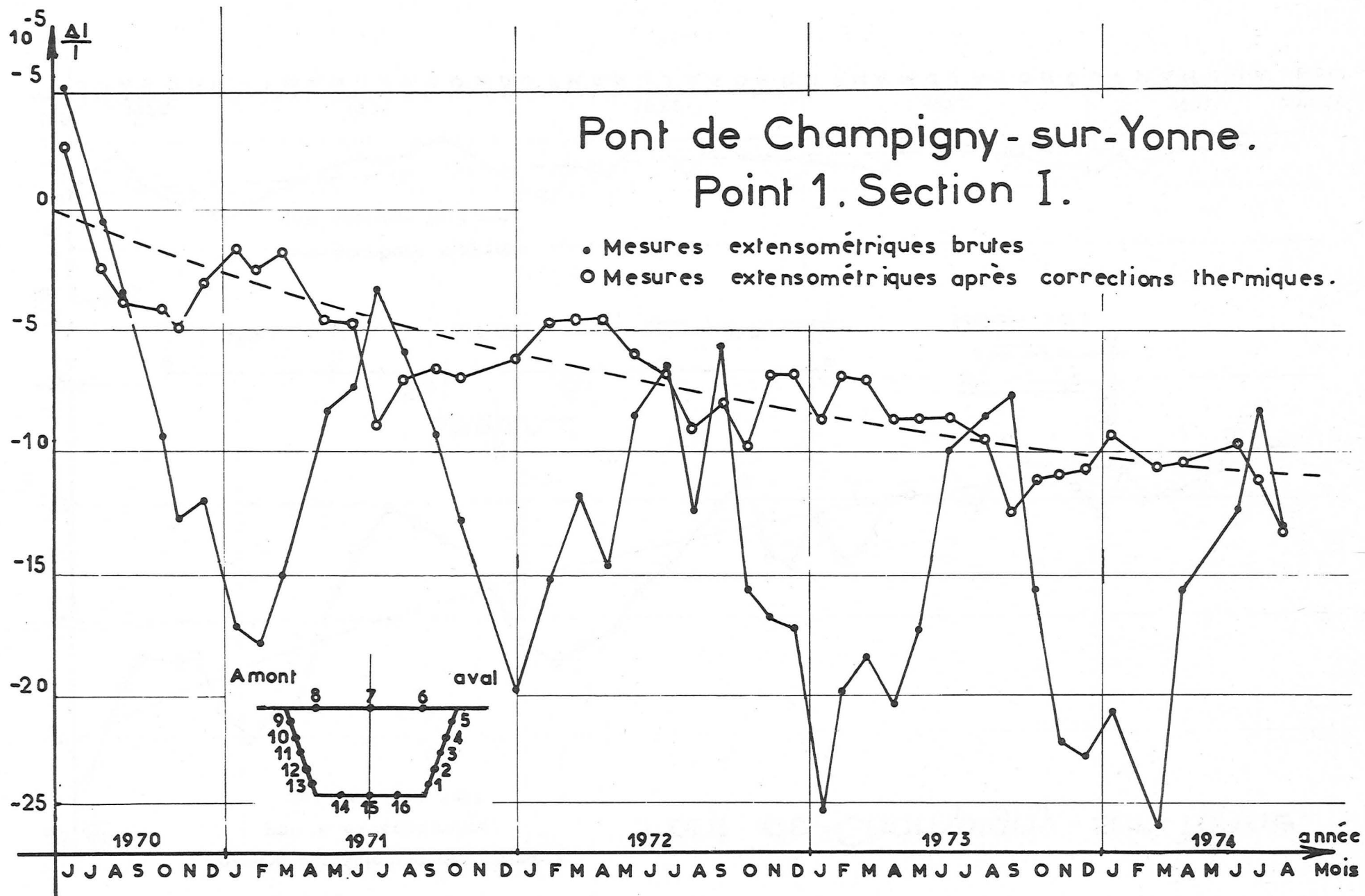
Pont de Champigny

Réactions d'appuis théoriques dues à la redistribution

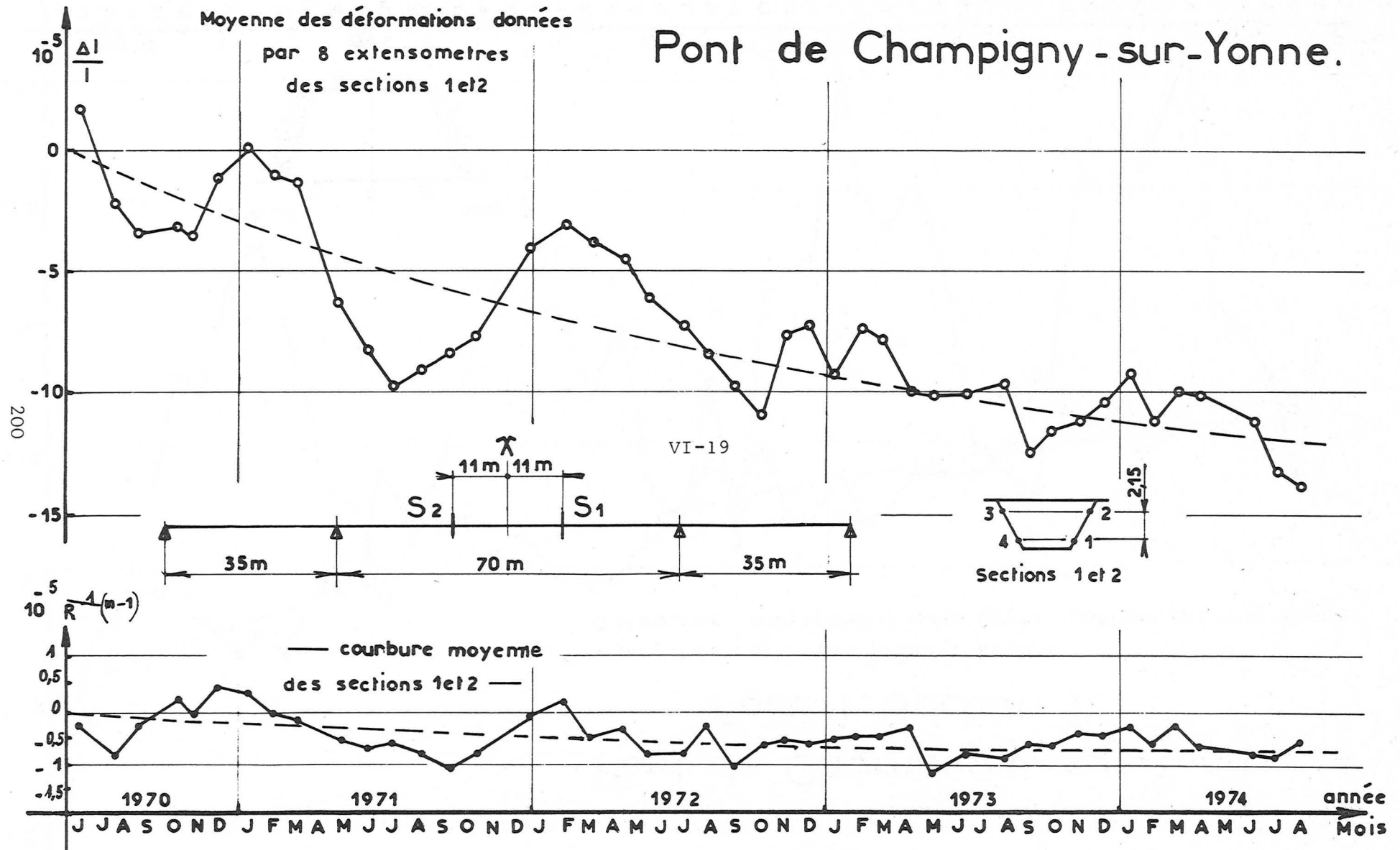
(Extrait du calcul sur l'ordinateur IRIS 80)

Jours après le jour de clavage	:	Réactions en KN	::	Jour après le jour de clavage	:	Réactions en KN
	:		::		:	
10	:	107,46	::	660	:	455,61
20	:	168,80	::	720	:	461,75
30	:	207,75	::	780	:	467,30
60	:	269,84	::	840	:	472,36
90	:	302,58	::	900	:	477,02
120	:	325,07	::	960	:	481,32
150	:	342,43	::	1020	:	485,28
180	:	356,64	::	1080	:	488,98
210	:	368,68	::	1140	:	492,43
240	:	379,11	::	1200	:	495,66
270	:	388,29	::	1260	:	498,70
300	:	396,48	::	1320	:	501,57
330	:	403,87	::	1380	:	504,27
360	:	410,56	::	1440	:	506,84
390	:	416,69	::	1500	:	509,28
420	:	422,32	::	1560	:	511,58
450	:	427,53	::	1620	:	513,80
480	:	432,37	::	1680	:	515,90
540	:	441,09	::	1740	:	517,92
600	:	448,77	::	1800	:	519,85
	:		::		:	





Pont de Champigny-sur-Yonne.

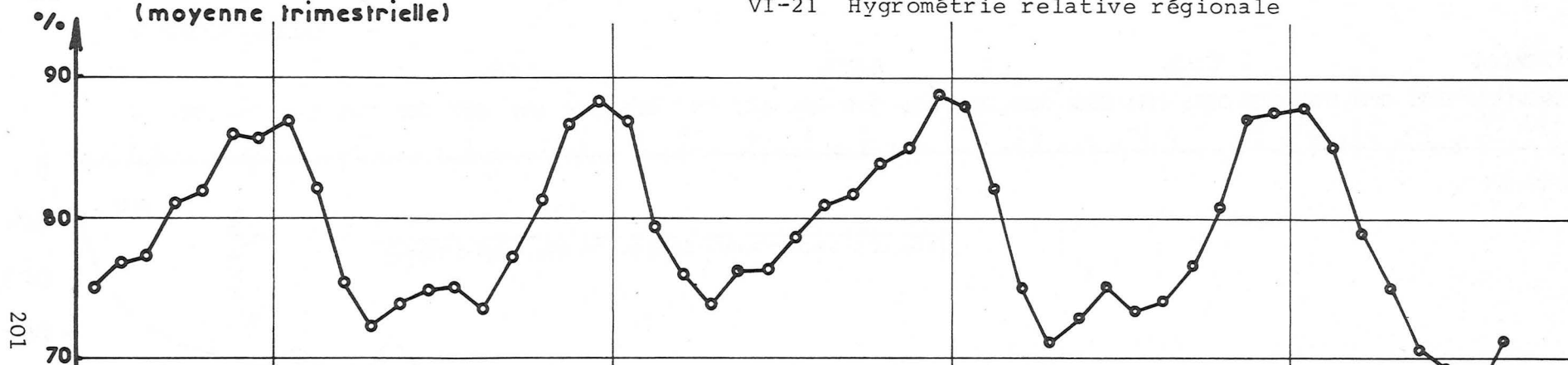


Pont de Champigny-sur-Yonne.

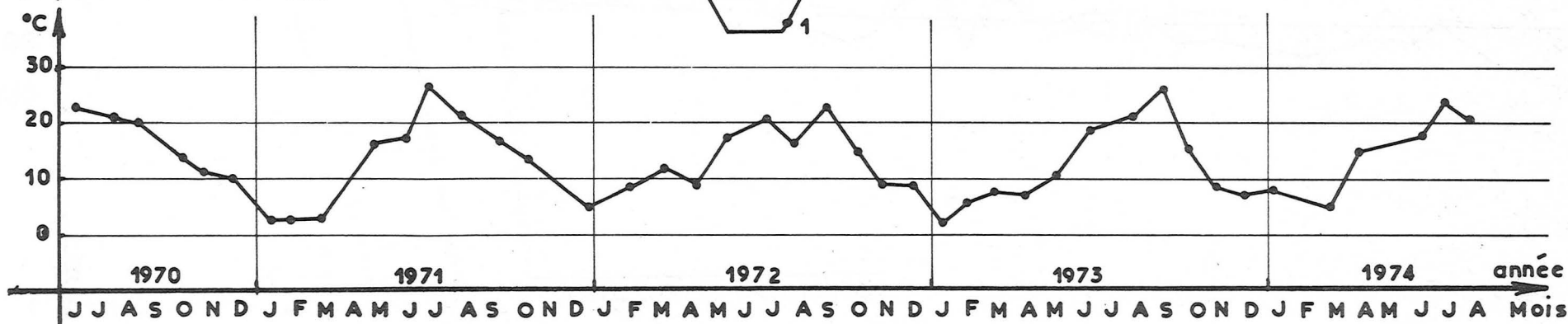
Point 1. Section I.

Hygrométrie relative régionale
(moyenne trimestrielle)

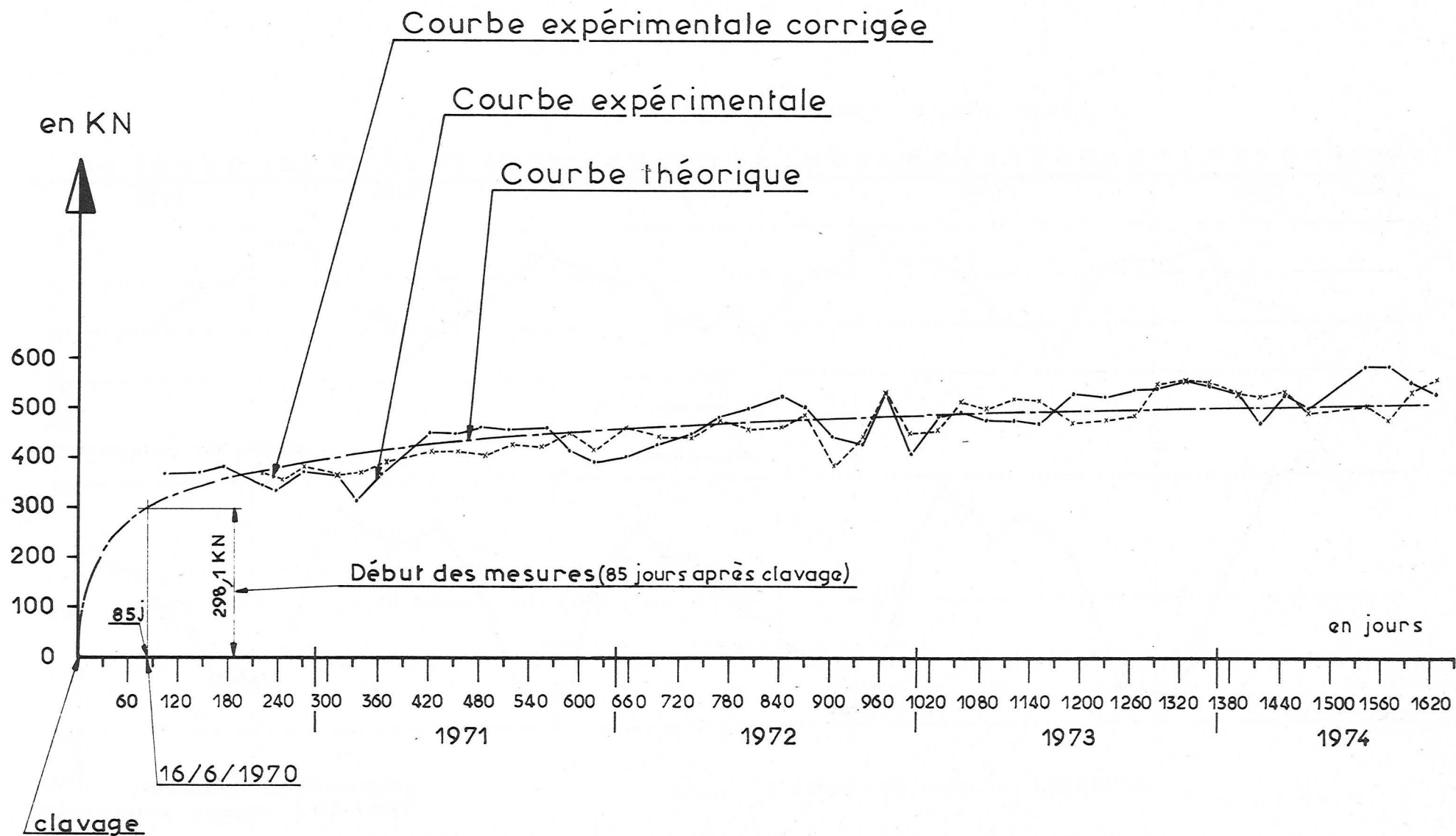
VI-21 Hygrométrie relative régionale



Température du béton.



VI-22 Température du béton (Sonde 1)



PONT de CHAMPIGNY sur YONNE

FIG. VI.23

CHAPITRE VII

CONCLUSION

VII - CONCLUSION

Les conclusions que l'on peut apporter à cette recherche nous paraissent être de deux ordres.

1) Point de vue métrologique

- Mesures de température

On constate l'importance et la complexité des phénomènes thermiques. Il est nécessaire de recourir à un équipement de mesure lourd surtout pour connaître les phénomènes rapidement variables. Cependant l'étude faite ici permet de définir une disposition optimale d'un nombre relativement restreint de sondes de température dans le but d'appréhender l'effet global des variations thermiques sur un ouvrage.

- Mesures des réactions d'appui

On constate la précision avec laquelle on peut mesurer sur chantier des réactions de l'ordre de 200 t, obtenue grâce à des pesons sans dérive en fonction du temps, mis au point pour la première fois par la Laboratoire Central des Ponts et Chaussées de Paris. Les dynamomètres permettent de mesurer les réactions au cours du temps et de comparer avec les résultats des notes de calcul. Il est utile de souligner que les forces mesurées sont les paramètres les plus importants, intégrant l'ensemble de phénomènes internes dus à la redistribution. Nous pensons que cet appareillage de surveillance efficace aura une large diffusion pour tous les ouvrages importants.

2) Point de vue du calcul

Deux résultats importants peuvent être dégagés de l'étude que nous avons menée.

- Les phénomènes thermiques ont sur le comportement d'ensem-

ble des ouvrages étudiés une influence non négligeable, dont il est possible de tenir compte d'une manière simple en incluant aux actions extérieures exercées sur un ouvrage l'action d'une différence de température d'au moins 5° C entre les faces supérieure et inférieure du tablier. Nous avons développé une méthode de calcul précise de cet effet à partir des résultats de mesures de température. Néanmoins, pour avoir une idée parfaitement précise de l'importance des phénomènes thermiques, il est nécessaire d'effectuer encore des mesures sur de nombreux autres ouvrages.

- Le calcul des variations de réactions hyperstatiques fondé sur l'examen séparé du fluage et retrait du béton d'une part et de la relaxation des aciers de précontrainte d'autre part, s'est révélé insuffisant pour expliquer les phénomènes observés sur l'ouvrage instrumenté. Seule la prise en compte de l'interdépendance du comportement rhéologique de ces deux matériaux associés dans le béton précontraint, sur laquelle repose la théorie que nous avons développée, traduit de manière satisfaisante les phénomènes observés.

Nous sommes persuadés que pour prévenir les conséquences préjudiciables pour la sécurité que peut amener la redistribution des réactions hyperstatiques, il sera nécessaire de tenir compte de ce phénomène au stade du projet et nous espérons que cette étude puisse donner les premiers éléments pour établir les critères de la durée de la vie des ouvrages d'art en béton précontraint.

abstract

REDISTRIBUTION OF HYPERSTATIC EFFECTS THROUGH LINEAR CREEP IN PRESTRESSED CONCRETE BRIDGES

The calculation of variations in hyperstatic reactions based, on one hand on the separate investigation of creep and shrinkage of concrete, and on the other on the relaxation of the prestressing bars, has proved insufficient to explain the phenomena observed on the instrumented structure. However, taking into account the interdependence of the rheological behaviour of these two materials associated in the prestressed concrete, the basis of the theory developed by the author gives satisfactory explanation of the phenomena observed.

The thermal factors have a marked influence on the overall behaviour of the structures monitored, which can be taken into consideration in a simple way by including in the external loads exerted on a structure, the influence of a difference in temperature of at least 5° C between the upper and lower surfaces of the bridge deck. This article presents the development of an accurate method of calculation of this effect using the results of temperature measurements.

zusammenfassung

UMLAGERUNG DER STATISCH UNBESTIMMTEN EFFEKTE VON SPANNBETONBRÜCKEN DURCH LINEARES KRIECHEN

Die Berechnung der Schwankungen von statisch unbestimmten Reaktionen, aufgrund der getrennten Untersuchung des Kriechens und des Schwindens des Betons einerseits, und des Spannungsabfalls im Spannstahl andererseits, hat sich als ungenügend zur Erklärung der auf dem instrumentierten Bauwerk beobachteten Erscheinungen erwiesen. Die Berücksichtigung der gegenseitigen Abhängigkeit des rheologischen Verhaltens der beiden im vorgespannten Beton zusammenwirkenden Baustoffe, auf welcher die von uns entwickelte Theorie begründet ist, drückt auf zufriedenstellende Art die beobachteten Erscheinungen aus.

Die Wärmeerscheinungen haben auf das Verhalten der Gesamtheit aller untersuchten Bauwerke einen nicht geringfügigen Einfluss, den man auf einfache Weise berücksichtigen kann, indem man den auf ein Bauwerk ausgeübten Ausseneinflüssen einen Temperaturunterschied von mindestens 5°C zwischen oberer und unterer Seite der Fahrbahntafel einschliesst. Eine genaue Berechnungsmethode dieser Einwirkungen, von den Temperaturmessergebnissen ausgehend, wurde entwickelt.

REDISTRIBUCIÓN DE LOS EFECTOS HIPERESTÁTICOS
DE LOS PUENTES DE HORMIGÓN PRETENSADO POR FLUENCIA LINEAL

El cálculo de las variaciones de las reacciones hiperestáticas, fundado en el examen separado de la fluencia y retracción del hormigón, por un lado, y del relajamiento de los aceros para hormigón pretensado, por otra parte, ha resultado insuficiente para explicar los fenómenos observados en las obras de fábrica instrumentadas. La toma en cuenta de la interdependencia del comportamiento reológico de ambos materiales asociados al hormigón pretensado, en la que se basa la teoría que hemos expuesto, pone de manifiesto de modo satisfactorio los fenómenos observados.

Los fenómenos térmicos tienen una influencia no menos apreciable en el comportamiento general de las obras estudiadas, influencia que se puede tener en cuenta de modo sencillo incluyendo en las acciones exteriores ejercidas en una obra, la acción de una diferencia de temperatura de por lo menos 5°C entre las caras superiores e inferiores del tablero. Se desarrolla un método de cálculo preciso del efecto partiendo de los resultados de medidas de temperatura.

резюме

Перераспределение статически неопределимых эффектов под влиянием линейной ползучести предварительно напряженных конструкций железобетонных мостов

Расчет изменений статически неопределимых реакций, основанный на раздельном исследовании, с одной стороны ползучести и усадки бетона, а с другой релаксации натяжения арматуры бетона, оказался недостаточным для объяснения явлений, выявленных в конструкции при помощи контрольно-измерительных приборов. Разработанная нами теория, основанная на учете взаимозависимости реологических свойств этих двух материалов, составляющих предварительно напряженный бетон, дает удовлетворительное объяснение наблюдаемых явлений. Температурные воздействия оказывают на общее состояние исследуемых конструкций некоторое влияние, которым нельзя пренебречь и которое учитывается довольно просто путем включения в число внешних факторов, воздействующих на сооружения, влияния, вызванного перепадом температуры не менее 5°C между верхними и нижними плоскостями плит проезжей части. В статье предлагается точный метод расчета указанного воздействия, основанный на результатах измерений температуры.

Publié par le LCPC, 58 boulevard Lefebvre – 75732 PARIS CEDEX 15, sous le numéro 502 448

Dépôt légal : 2e trimestre 1975

